

513(075)

Ю-936

Н. РЫБКИН

Р 93

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПЕРЕРАБОТАНО
В.А.ЕФРЕМОВЫМ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ПЛАНИМЕТРИЯ

Цена 90 коп.

Об. Энз.



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА 1935

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
§ 1. Прямая линия (1—18)	3
§ 2. Углы (1—37)	5
§ 3. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляр и наклонные. Осевая симметрия (1—50)	8
§ 4. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника и многоугольника (1—59)	13
§ 5. Параллелограммы и трапеции (1—93)	19
§ 6. Окружность (1—58)	28
§ 7. Измерение углов дугами (1—88)	34
§ 8. Пропорциональные отрезки. Свойство биссектрисы в треугольнике (1—28)	42
§ 9. Подобие треугольников и многоугольников (1—60)	46
§ 10. Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырёхугольников (1—112)	52
§ 11. Пропорциональные отрезки в круге (1—46)	65
§ 12. Правильные многоугольники (1—47)	72
§ 13. Площади прямолинейных фигур (1—143)	77
§ 14. Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов (1—23)	92
§ 15. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей (1—71)	94
§ 16. Приложение алгебры к геометрии. Деление в среднем и крайнем отношении (1—37)	102
Ответы	106

Н. Рыбкин. Сборник задач по геометрии, ч. I. Планиметрия.
Для 6—9 классов семилетней и средней школы.

Редактор *Л. А. Сидорова*, Технический редактор *Г. Л. Татура*,
Корректор *Т. М. Грифовская*.

Подписано к печати с матриц 15/XI 1960 г. 84 × 103^{1/32}.
Печ. л. 7,5 (615). Уч.-изд. л. 6,86. Тираж 500 тыс. (500 001—1 000 000) экз.
Учпедгиз, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41.
Цена без переплёта 90 к. Переплёт 50 к.
С 1/I 1961 г. цена 9 к. Заказ 1504.

Отпечатано с матриц Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова,
Москва, на Книжной фабрике им. Фрунзе Главполиграфиздата Министерства
культуры УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.

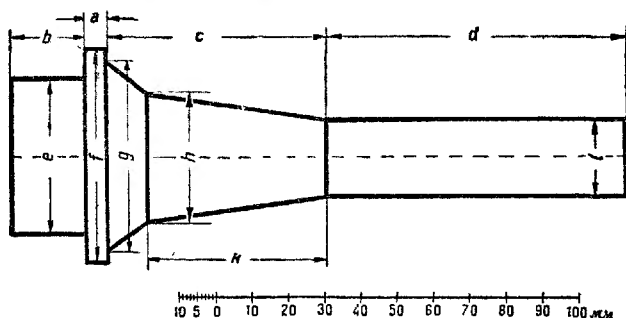
§ 1. Прямая линия.

(Задачи этого параграфа решать геометрическим построением; решения проверять арифметически.)

Измерение отрезков и действия над ними.

1. На чертеже 1 изображена часть станка. Измерить, пользуясь данным масштабом, отрезки, обозначенные на чертеже размерными линиями, и записать полученные числа в тетради.

2. Сращены впритык три деревянные балки: длина первой 4,8 м, второй 3,4 м и третьей 5,8 м. Найти их общую длину арифметически и построением, изображая 1 м отрезком в 1 см.



Черт. 1.

3. Ель имела 20,25 м длины; от неё отпилили снизу отрезок („лапу“) длиной в 3,75 м, а затем бревно в 7,40 м. Какую длину имеет оставшаяся часть ели?

4. На отрезке AB длиной в 20 м от конца A отложена часть $AC=5,1$ м, от конца B часть $BD=7,9$ м. Определить длину отрезка CD .

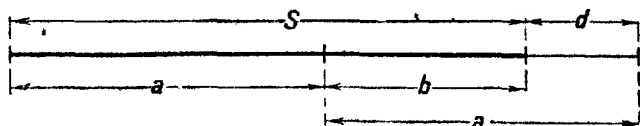
5. Решить задачу 4, изменив числа так: $AB=4,8$ м, $AC=2,8$ м, $BD=3$ м.

6. Начертить отрезок, равный $3a + 2b$, где a и b — длины данных отрезков.

7. Начертить отрезок, равный $4m - 3n$, где m и n — длины данных отрезков ($m > n$).

8. От точки M отложены на одной прямой и в одном направлении два отрезка: $MN = 100$ см и $MP = 160$ см. Найти расстояние между серединами этих отрезков.

9. Отрезок AB разделён на две неравные части. Расстояние между серединами этих частей равно 2,75 м. Найти длину AB .



Черт. 2.

10. Объяснить по чертежу (черт. 2), как по данной сумме S двух отрезков и их разности d найти построением оба отрезка ($S = 7$ см; $d = 1,5$ см).

Пропорциональное деление в применении к отрезкам.

11. Отрезок AB равен 2,8 м. Найти расстояние между серединой этого отрезка и точкой, которая делит его в отношении $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$.

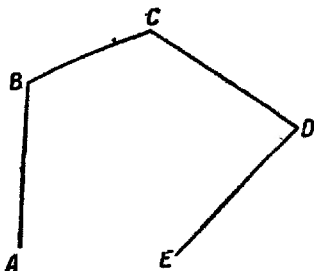
12. Отрезок AB продолжен на длину BC так, что AC в m раз более AB ($m = 5$). Найти отношение $AB:BC$.

13. Отрезок AB разделён на три части в отношении 2:3:4. Расстояние между серединами крайних частей равно 5,4 м. Определить длину AB .

14. Отрезок AB делится точкой C в отношении 5:7, а точкой D в отношении 5:11; расстояние между C и D равно 10 м. Определить длину AB .

Длина ломаной.

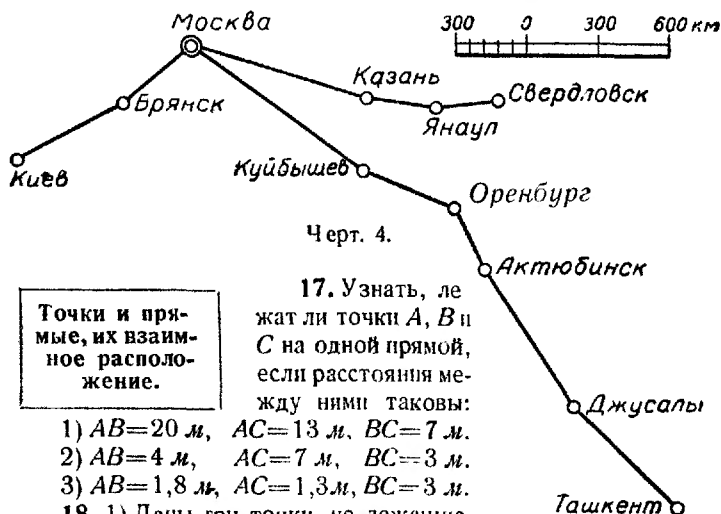
15. Дана ломаная $ABCDE$ (черт. 3). Найти сумму отрезков ломаной, измерив каждый



Черт. 3.

отрезков ломаной, измерив каждый отрезок. Выпрямив ломаную (построением), измерить длину получившегося отрезка. Сравнить оба полученных ответа.

16. На чертеже 4 дана карта воздушных сообщений. Сравнить (посредством выпрямления ломаных) расстояния от Москвы до Киева, Свердловска и Ташкента. Найти, пользуясь масштабом, каждое из этих расстояний.



Точки и прямые, их взаимное расположение.

17. Узнать, лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если расстояния между ними таковы:

1) $AB=20$ м, $AC=13$ м, $BC=7$ м.

2) $AB=4$ м, $AC=7$ м, $BC=3$ м.

3) $AB=1,8$ м, $AC=1,3$ м, $BC=3$ м.

18. 1) Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через эти точки, беря их попарно?

2) Сколькими прямыми можно соединить попарно 4 точки, из которых никакие 3 не расположены на одной прямой? Тот же вопрос относительно 5 точек, 20 точек, n точек.

§ 2. Углы.

Построение и измерение углов и действия над ними.

1. Построить угол, равный данному углу.

2. При помощи транспортира построить углы в 60° ; 75° ; 125° ; 150° .

3. Построить на глаз углы в 30° ; 45° ; 120° и 135° . Проверить построенные углы транспортиром.

Задачи № 4—16 решать сначала геометрическим построением при помощи транспортира, а затем проверить решение арифметически.

4. Построить угол, равный сумме двух данных углов.

5. Найти сумму трех данных углов.

6. Найти сумму углов: 1) $45^{\circ}36'$ и $78^{\circ}57'$; 2) $26^{\circ}16'45''$ и $117^{\circ}52'30''$; 3) $15^{\circ}40'$, $37^{\circ}50'30''$, $88^{\circ}45''$ и $20^{\circ}30'40''$.

7. Построить угол, равный разности двух данных углов.

8. Найти разность углов: 1) $96^{\circ}35'15''$ и $48^{\circ}45'45''$; 2) $71^{\circ}10'$ и $29^{\circ}52'30''$; 3) $153^{\circ}17'42''$ и $68^{\circ}29'$.

9. Найти дополнение до прямого угла к следующим острым углам: 1) 70° ; 2) $34^{\circ}23'$; 3) $22^{\circ}42'38''$.

10. По данным сумме и разности двух углов построить эти углы.

11. Данный острый угол увеличить в 3 раза.

12. Найти произведение: 1) $35^{\circ}42' \cdot 5$; 2) $17^{\circ}23'45'' \cdot 4$; 3) $55^{\circ}32'30'' \cdot 3$.

13. Разделить данный угол на 2, 4, 8, 16 равных частей.

14. Найти частное: 1) $93^{\circ}15':3$; 2) $147^{\circ}45':2$; 3) $98^{\circ}21'50':4$; 4) $161^{\circ}40':8$.

15. Начертить острый и тупой углы. Узнать, сколько раз острый угол содержится в тупом.

16. Найти частное: 1) $105^{\circ}:30^{\circ}$; 2) $66^{\circ}55':24^{\circ}20'$; 3) $28^{\circ}35':40^{\circ}50'$.

17. Внутри тупого угла восставлены из его вершины перпендикуляры к его сторонам; угол между этими перпендикулярами равен $\frac{4}{7}d$. Определить тупой угол.

Прилежащие
углы.

Сделать точный чертёж, пользуясь транспортиром.

18. Даны два прилежащих угла: острый и тупой. Прямая, проведённая через их вершину перпендикулярно к их общей стороне, отклонена от другой стороны острого угла на $\frac{5}{7}d$, а от другой стороны тупого угла на $\frac{3}{7}d$. Найти сумму данных углов и сделать точный чертёж.

Смежные
углы.

19. Запасной путь на железнодорожной станции отходит от главного пути под углом в 20° . Начертить расположение путей.

20. Начертить угол, который в сумме с данным углом ABC составляет два прямых угла.

21. На прямой AB взята точка C и из неё проведён луч CD так, что угол ACD в 4 раза более угла BCD . Определить величину этих углов.

22. Определить 2 смежных угла, из которых один на $\frac{2}{9}d$ более другого.

23. Определить угол, который равен $\frac{3}{7}$ своего смежного.

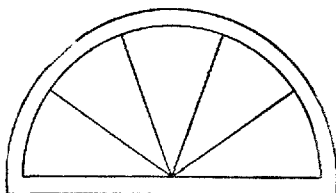
24. Из двух прилежащих углов ABC и CBD первый равен 108° , а второй меньше его в $1\frac{1}{2}$ раза. Составляют ли стороны BA и BD одну прямую линию?

25. Отношение двух прилежащих углов равно $7:3$, а разность их равна 72° . Будут ли эти углы смежными?

26. Углы ABC и CBD смежные, угол $CBD = 0,375d$. Определить угол между перпендикуляром, проведённым из точки B к прямой AB , и биссектрисой угла ABC . Сделать чертёж.

27. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

28. Определить два прилежащих угла AOB и BOC , зная, что их сумма равна 216° и что продолжение стороны AO (за вершину) делит угол BOC пополам. Сделать точный чертёж.



Черт. 5.

29. Из четырёх прилежащих углов AOB , BOC , COD , DOE каждый следующий

больше предыдущего на $\frac{1}{9}d$; стороны AO и OE составляют одну прямую. Вычислить и построить эти углы.

30. Верхняя часть окна имеет вид, показанный на чертеже 5. Определить, сколько градусов содержит угол между двумя соседними лучами.

Углы с общей вершиной, расположенные по обе стороны прямой.

31. Сколько градусов содержит угол между двумя соседними спицами колеса, которое имеет 18 спиц? 16 спиц?

32. Угол ABC равен $\frac{6}{11}d$; из вершины B проведён вне угла ABC луч B' ,

равноотклонённый от прямых BA и BC . Вычислить величину этого отклонения.

33. Четыре угла, образуемые четырьмя лучами, выходящими из одной точки, таковы, что каждый следующий угол

вдвое больше предыдущего. Найти величину каждого из них и построить эти углы.

Противоположные (вертикальные) углы.

34. Один из четырёх углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми, равен $\frac{3}{5}d$. Как велик каждый из остальных углов?

35. С помощью одной линейки начертить угол, равный данному углу и имеющий с ним общую вершину

36. Прямые AB и CD пересекаются в точке O . Сумма углов AOD и COB равна 220° . Определить угол AOC .

37. Данный угол и два смежных с ним составляют в сумме $2\frac{3}{8}d$. Определить данный угол.

§ 3. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляр и наклонные. Осевая симметрия.

Равнобедренный треугольник.

1. Построить равнобедренный треугольник:

- 1) по основанию и боковой стороне;
- 2) по основанию и углу при основании;

3) по боковой стороне и углу при вершине;

4) по боковой стороне и углу при основании.

2. На боковой стороне равнобедренного треугольника построен равносторонний треугольник; периметр этого второго треугольника равен 45 м, а периметр первого треугольника 40 м. Определить основание заданного треугольника.

Построение треугольников и равенство их.

3. Построить треугольник:

- 1) по стороне и двум прилежащим углам;
- 2) по двум сторонам и углу между ними;
- 3) по трём сторонам.

4. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны. Доказать.

5. Доказать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, равны.

6. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B , между которыми нельзя пройти с мерной цепью (черт. 6), выбирают такую точку C , из которой были бы видны как точка A , так и B и из которой можно было

бы к ним пройти. Провешивают¹⁾ AC и BC , продолжают их за точку C и отмеряют $CD=AC$ и $EC=CB$. Тогда отрезок ED равен искомому расстоянию AB . Почему?

7. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B , из которых одна (точка A) недоступна, провешивают направление отрезка AB (черт. 7) и на его продолжении отмеряют произвольный отрезок BE . Выбирают на местности точку D , из которой можно было бы видеть точку A и пройти к точкам B и E . Провешивают прямые $BDDG$ и EDF и отмеряют $FD=DE$ и $DG=BD$. Затем идут по прямой FG , смотря на точку A , пока не найдут такую точку H , которая лежит на прямой AD . Тогда HG равно искомому расстоянию. Доказать.

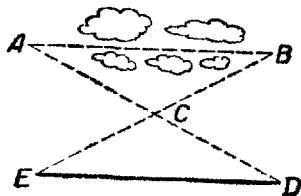
8. На каждой стороне равностороннего треугольника ABC отложены отрезки $AB_1=BC_1=CA_1$. Точки A_1 , B_1 и C_1 соединены прямыми. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ тоже равносторонний.

9. Каждая из сторон равностороннего треугольника ABC продолжена: AB — за вершину B ; BC — за вершину C ; CA — за вершину A ; на продолжениях отложены отрезки одинаковой длины, и концы их соединены между собой. Определить вид полученного треугольника.

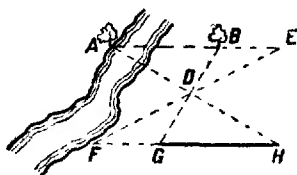
10. 1) Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них.

2) Доказать теорему: если две стороны и угол против большей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против большей из них другого треугольника, то треугольники равны.

11. 1) Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них.



Черт. 6.



Черт. 7.

¹⁾ То есть отмечают направление шестами-вехами.

2) Показать, что если две стороны и угол против меньшей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против меньшей из них другого треугольника, то треугольники могут быть как равными, так и неравными.

12. Доказать теорему: если две стороны и медиана одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны. Рассмотреть 2 случая: 1) медиана проведена к одной из данных сторон; 2) медиана проведена между данными сторонами.

**Зависимость
между сто-
ронами тре-
угольника.**

13. Может ли быть треугольник с такими сторонами: 1) 5 м, 10 м, 12 м; 2) 1 м, 2 м, 3,3 м; 3) 1,2 м, 1 м, 2,2 м?

14. Могут ли стороны треугольника относиться, как: 1) 1:2:3; 2) 2:3:4?

15. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая 0,7 м. Определить третью сторону, зная, что она выражается в целых метрах.

16. Периметр равнобедренного треугольника равен 1 м, а основание равно 0,4 м. Определить длину боковой стороны.

17. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 м, а другая 10 м. Какая из них служит основанием?

18. Медиана, проведённая к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части длиной в 15 см и 6 см. Определить стороны треугольника.

19. Доказать, что в треугольнике каждая сторона менее половины периметра.

20. Доказать, что сумма расстояний какой-нибудь точки внутри треугольника до его вершин более половины периметра.

21. Внутри треугольника ABC проведена к стороне BC прямая AD так, что угол CAD равен углу ACD . Периметры треугольников ABC и ABD равны 37 м и 24 м. Определить длину AC .

22. В равнобедренном треугольнике ABC проведена высота BD . Периметр треугольника ABC равен 50 м, а периметр треугольника ABD равен 40 м. Определить высоту BD .

**Перпендику-
ляр и наклон-
ные.**

23. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 14 см; из её середины D проведён к ней перпендикуляр DE до пересечения со стороной BC , и точка E соединена с A ; периметр треугольника AEC равен 24 см. Определить длину AC .

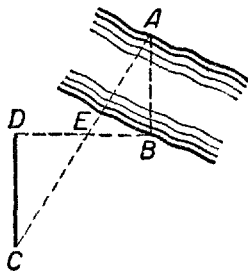
24. Из одной точки проведены к данной прямой две равные наклонные; расстояние между их основаниями равно 16 м. Определить проекцию каждой наклонной на данную прямую.

Построение и равенство прямоугольных треугольников.

25. Построить прямоугольный треугольник:

- 1) по двум катетам;
- 2) по катету и гипотенузе;
- 3) по катету и острому углу;
- 4) по гипотенузе и острому углу.

26. Чтобы измерить расстояние между пунктами A и B , расположенными на разных берегах реки, при помощи эккера провешивают перпендикулярно AB отрезок BD произвольной длины (черт. 8). Делят BD в точке E пополам. Проводят перпендикуляр DC к BD в точке D ; идут по DC , смотря на A , до той точки C , которая лежит на прямой AE . Длина DC равна AB . Доказать.



Черт. 8.

27. 1) Доказать, что прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

2) Через точку, данную внутри или вне угла, провести такую прямую, которая отсекала бы от сторон угла равные части.

28. 1) Доказать, что в равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на боковые стороны, равны.

2) Составить обратную теорему и доказать её.

29. Три селения A , B и C не лежат на одной прямой. Указать на чертеже, как провести из A прямую дорогу между селениями B и C на равных расстояниях от них.

30. По одну сторону прямой AB даны две точки M и N . Найти на прямой AB такую точку C , чтобы прямая AC составляла равные углы со сторонами ломаной MCN .

Геометрические места точек.

31. Дан треугольник ABC . На биссектрисе угла A найти точку, равноудалённую от вершин B и C .

32. Найти точку, равноудалённую от всех вершин треугольника. Всегда ли эта точка будет внутри треугольника?

33. Даны угол и точка M внутри угла. Найти такую точку, которая была бы одинаково удалена от обеих сторон угла и отстояла бы от точки M на данное расстояние a .

34. Найти на стороне треугольника точку, равноудалённую от двух других сторон.

35. В треугольнике найти точку, равноудалённую от всех трёх сторон.

36. Дан угол A и точки B и C , расположенные одна на одной стороне угла, другая на другой. Найти:

1) точку M , равно отстоящую от сторон угла и удовлетворяющую условию, что $MC = MB$;

2) точку N , расположенную на стороне угла, причём так, чтобы $NC = CB$;

3) точку P такую, чтобы каждая из точек B и C одинаково отстояла от A и P .

37. Дан угол A и точка B на одной из его сторон. Найти на другой стороне такую точку C , чтобы сумма $CA + CB$ была равна данной длине l .

Четырёх- угольники.

38. Определить стороны четырёхугольника, если они относятся между собой, как $2:5:4:8$, а периметр четырёхугольника равен 76 м.

39. Могут ли стороны четырёхугольника относиться, как $2:3:4:10$?

40. 1) Построить четырёхугольник, стороны которого 1 см, 2 см, 3 см и 4 см, а диагональ, проходящая между первой и четвёртой сторонами, равна $2,6$ см.

2) То же по четырём сторонам, равным $1,2$ см, $1,8$ см, $2,4$ см и $3,0$ см, и углу между второй и третьей сторонами, содержащему 102° .

41. Четырёхугольник разделён диагональю на 2 треугольника, периметры которых равны 25 м и 27 м; периметр четырёхугольника равен 32 м. Найти длину проведенной диагонали.

Многоуголь- ники.

42. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: 1) пятиугольника; 2) десятиугольника; 3) n -угольника?

43. Сколько получится треугольников, если провести все диагонали из одной вершины: 1) шестиугольника; 2) восьмиугольника; 3) n -угольника?

44. Сколько всего диагоналей можно провести: 1) в пятиугольнике; 2) в десятиугольнике; 3) в n -угольнике?

45. Сколько сторон в многоугольнике, если число их в m раз больше числа диагоналей, проведённых из одной вершины? ($m=2; 4; 5$.)

46. Сколько сторон имеет многоугольник, если число всех его диагоналей в m раз больше числа сторон? ($m=0,5; 1; 2; 2,5$.)

**Осевая
симметрия.**

47. Построить отрезок, симметричный данному относительно данной оси симметрии.

48. Построить треугольник, симметричный данному прямоугольному треугольнику относительно: 1) одного катета; 2) другого катета; 3) гипотенузы.

49. Дана ось симметрии и окружность. Начертить симметричную ей окружность.

50. Дана ось симметрии и ломаная линия. Начертить другую ломаную, симметричную данной.

§ 4. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника и многоугольника.

**Углы при па-
раллельных
и секущей.**

1. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Один из полученных восьми углов равен 72° . Чему равен каждый из остальных?

2. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой; при этом один из внутренних углов равен $1\frac{3}{8}d$. Под каким углом его биссектриса пересекает другую параллель?

3. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Сумма трёх углов: данного внутреннего, внутреннего одностороннего с ним и накрест лежащего с первым углом — равна $3\frac{2}{7}d$. Определить угол, соответственный с первым внутренним.

4. Прямые AMB и CND пересечены прямой $EMNF$, $\angle CNF = \frac{3}{16}d$ и $\angle NMB = \frac{3}{4}d$. Параллельны ли данные прямые? Как надо изменить величину угла NMB , чтобы прямые сделались параллельными?

5. Прямые $AMNB$ и $CRSD$ пересечены прямыми $EMRF$ и $GNSH$. Дано, что $\angle AME = 1\frac{5}{24}d$, $\angle ANS = 1\frac{3}{8}d$ и $\angle MRS = \frac{19}{24}d$. Определить $\angle DSH$.

Углы с параллельными и перпендикулярными сторонами.

6. Дан $\angle ABC = 43^\circ$. Из точки P , лежащей внутри этого угла, проведены две прямые параллельно его сторонам до пересечения с ними. Определить углы образовавшегося четырёхугольника.

7. Даны два угла с параллельными сторонами; один из них на 90° больше другого. Чему равен каждый угол?

8. Даны два угла с перпендикулярными сторонами; один из них в 4 раза меньше другого. Найти величину каждого угла?

9. Через концы основания треугольника проведены два перпендикуляра к боковым сторонам; пересекаясь, эти перпендикуляры образуют угол в 130° . Вычислить угол при вершине треугольника.

Сумма углов треугольника.

10. В треугольнике один угол равен $1\frac{1}{6}d$, а другой $\frac{3}{8}d$. Чему равен третий угол?

11. Определить углы треугольника, если они относятся, как 1:2:3.

12. Два угла треугольника относятся, как 5:7, а третий угол на $\frac{4}{19}d$ больше первого.

Определить третий угол.

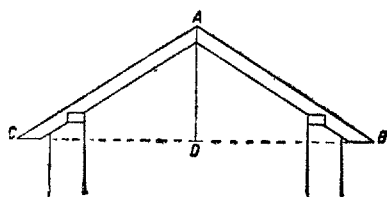
13. В треугольнике два угла равны: $110^\circ 23' 50''$ и $24^\circ 36' 40''$.

Определить третий угол.

14. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен $58^\circ 20'$. Определить другой острый угол.

15. В средней полосе СССР обычно приняты следующие размеры угла между стропильными ногами AC и AB (черт. 9):

для железных	крыш	120°	(приблизительно)
„ толевых	„	145°	
„ черепичных	„	100°	
„ тесовых	„	90°	



Черт. 9.

Равнобедренный треугольник.

Определить для каждой крыши тот угол, который стропильные ноги составляют с горизонтальной линией CB .

16. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $105^{\circ}27''$. Определить угол при основании.

17. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $70^{\circ}43'$. Определить угол при вершине.

18. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $1\frac{2}{7}d$. Определить угол при основании.

19. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $\frac{5}{9}d$. Определить угол при вершине.

20. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30° ; на боковую сторону опущена высота. Найти угол между этой высотой и основанием.

21. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° ; найти угол между одной боковой стороной и высотой, опущенной на другую боковую сторону.

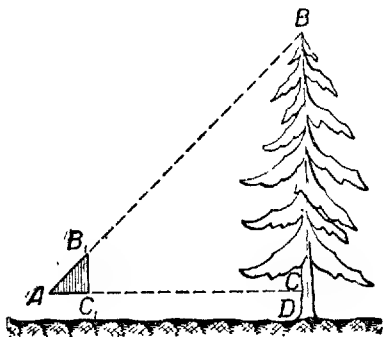
22. В равнобедренном треугольнике угол между высотой и боковой стороной на $\frac{1}{7}d$ меньше угла при основании. Определить углы этого треугольника.

Прямоугольный треугольник.

23. Для того чтобы измерить высоту дерева BD , приготовили прямоугольный треугольник AB_1C_1 с углом $A=45^{\circ}$ (черт. 10) и, держа его вертикально, отошли на такое расстояние, при котором, глядя вдоль гипотенузы AB_1 , увидели верхушку дерева B . Какова высота дерева, если расстояние $AC=5,6$ м, а высота человека 1,7 м?

24. 1) В прямоугольном треугольнике один острый угол равен $\frac{1}{2}d$. Определить катеты, если их сумма равна 36 см.

2) В прямоугольном треугольнике острый угол равен $\frac{1}{2}d$. Опреде-



Черт. 10.

лить гипотенузу, если в сумме с опущенной на неё высотой она составляет 12 см.

Катет, лежащий против угла в 30° .

25. Доказать теорему: если в прямоугольном треугольнике один острый угол равен 30° , то противолежащий ему катет равен половине гипотенузы.

26. Обратная теорема (см. задачу 25): если катет вдвое меньше гипотенузы, то противолежащий ему угол равен 30° . Доказать

27. С помощью циркуля и линейки разделить прямой угол на 3 равные части.

28. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен $\frac{2}{3}d$, а сумма гипотенузы с меньшим катетом равна 1,8 м. Определить гипотенузу.

Внешний угол треугольника.

29. В треугольнике ABC внешний угол при вершине B в три раза больше угла A и на $\frac{4}{9}d$ больше угла C . Определить углы треугольника.

30. В равностороннем треугольнике проведены две медианы; найти острый угол между ними.

31. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $\frac{d}{3}$. Найти острый угол между гипотенузой и биссектрисой прямого угла.

32. В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов вместе с одним из внешних равна $\frac{21}{8}d$. Определить углы этого треугольника.

33. Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

Применение теоремы о сумме углов треугольника к решению разных задач на треугольники.

34. Один из углов треугольника равен $\frac{2}{3}d$; как велик острый угол, образованный биссектрисами двух других углов треугольника?

35. Дан угол A ; от его вершины A откладываем на стороне отрезок AB ; из точки B проводим прямую, параллельную второй стороне данного угла; на этой прямой откладываем внутри угла отрезок BD , равный BA , и соединяем точку D

с вершиной A . Доказать, что прямая AD делит данный угол пополам.

36. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?

37. В треугольнике ABC угол B прямой; M — точка пересечения биссектрис углов A и C . Определить угол AMC .

38. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M . Определить угол ABC , если он равен половине угла AMC .

39. В треугольнике ABC угол B прямой; AD и CE — продолжения гипотенузы AC . Углы BAD и BCE разделены пополам; M — точка пересечения их биссектрис (продолженных за вершины). Определить угол AMC .

40. В равнобедренном треугольнике угол между основанием и высотой, опущенной на боковую сторону, равен $\frac{8}{15}d$. Определить углы этого треугольника

41. В равнобедренном треугольнике ABC высота AD , опущенная на боковую сторону BC , образует с боковой стороной AB угол $BAD = \frac{1}{3}d$. Определить углы этого треугольника:

1) предполагая, что высота AD проходит внутри треугольника, и 2) предполагая, что AD проходит вне треугольника.

42. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине.

43. Доказать теорему: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

44. Если на гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметить две точки E и D так, что $BE = BA$ и $CD = CA$, то $\angle DAE = \frac{1}{2}d$. Доказать.

45. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC ; CD — биссектриса угла C ; $\angle ABC = \frac{5}{3}d$. Определить $\angle B$.

46. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36° . Доказать, что биссектриса угла при основании, продолженная до пересечения с противоположной стороной, делит равнобедренный треугольник на два других тоже равнобедренных треугольника

47. В треугольнике ABC сторона AC продолжена за точку C на длину $CE = CB$, а сторона AB продолжена за точку A на длину $AD = AB$;

точки E и D соединены с B . Определить углы треугольника DBE , если углы треугольника ABC известны.

48. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE ; M — точка их пересечения. Определить $\angle AMC$, если дано, что $\angle BAC = \frac{1}{4}d$ и $\angle BCA = \frac{5}{6}d$.

49. В равнобедренном треугольнике ABC высоты AD и CE , опущенные на боковые стороны, образуют $\angle AMC = \frac{8}{15}d$. Определить углы треугольника ABC .

50. В треугольнике ABC из вершины C проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов; первая биссектриса образует со стороной AB угол, равный $\frac{6}{17}d$. Какой угол образует с продолжением стороны AB вторая биссектриса?

51. Из середины гипотенузы восстановлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении 2:5 (меньшая часть — при гипотенузе). Определить этот угол.

Сумма углов
многоуголь-
ника.

52. Определить сумму внутренних углов: 1) семиугольника; 2) десятиугольника; 3) двадцатипятиугольника.

53. Определить углы пятиугольника, зная, что величины их относятся между собой, как 1:1,5:2:2,5:3.

54. Как изменится сумма углов многоугольника, если число его сторон увеличить на 5?

55. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его внутренних углов равна: 1) $30d$; 2) $48d$; 3) $57d$?

56. В каком многоугольнике сумма внутренних углов равна сумме внешних углов?

57. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его внутренних углов вместе с одним из внешних равна $23d$?

58. Определить число сторон многоугольника, если сумма его внутренних углов в m раз больше суммы внешних углов ($m = 1, 2, 3$).

59. Определить углы четырёхугольника, если из них первые два относятся, как 5:7, третий равен их разности, а четвёртый меньше третьего на $\frac{4}{11}d$.

§ 5. Параллелограммы и трапеции.

Углы и стороны параллелограмма.

1. Один из углов параллелограмма равен $\frac{3}{7}d$. Определить остальные углы.

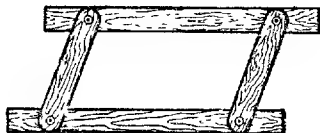
2. Определить углы параллелограмма, если один из них больше другого на $\frac{3}{11}d$.

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 9 см и составляет $\frac{3}{10}$ всего периметра. Определить другие стороны этого параллелограмма.

4. Две стороны параллелограмма относятся, как 3:4, а периметр его равен 2,8 м. Определить стороны.

5. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A , которая пересекает сторону BC в точке E . Определить отрезки BE и EC , если $AB = 9$ см и $AD = 15$ см.

6. На чём основано устройство чертёжных инструментов, называемых „параллельными линейками“ (черт. 11)?



Черт. 11.

7. Стороны параллелограмма равны 8 см и 3 см; биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащие к большей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найти каждую из них.

Диагонали параллелограмма.

8. Одна из сторон параллелограмма равна 5 м. Могут ли его диагонали выражаться следующими числами: 1) 4 м и 6 м; 2) 4 м и 3 м; 3) 6 м и 7 м?

9. Доказать, что всякий четырёхугольник, диагонали которого взаимно делятся пополам, есть параллелограмм.

10. Может ли диагональ параллелограмма равняться его стороне?

11. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Доказать, что отрезок её между параллельными сторонами делится в этой точке пополам.

12. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 2$ м и $AF = 2,8$ м. Определить стороны BC и AD .

13. В параллелограмме $ABCD$ высота, которая проведена из вершины B , делит основание AD пополам. Определить диагональ BD и стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма содержит $3,8$ м и превышает периметр треугольника ABD на 1 м

Построение параллелограмма.

14. Построить параллелограмм, стороны которого даны, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противолежащую сторону пополам

15. Построить параллелограмм: 1) по двум сторонам длиной в 2 см и 3 см и углу между ними, содержащему 110° ; 2) по двум сторонам, равным $2,1$ см и $3,2$ см, и одной из диагоналей, равной $4,0$ см,

3) по двум диагоналям, равным $6,0$ см и $5,0$ см, и одной из сторон, равной $4,5$ см;

4) по двум диагоналям, равным 5 см и 4 см, и углу между ними, равному 135° ;

5) по основанию, равному $2,0$ см, высоте, равной $1,5$ см, и диагонали, равной $3,2$ см

Разные задачи на параллелограммы.

16. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника равна 5 дм. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Вычислить периметр

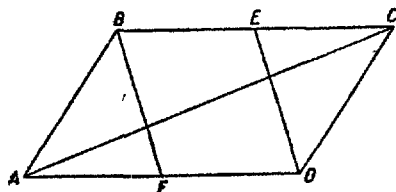
получившегося параллелограмма

17. В параллелограмме угол между высотами, проведенными из вершины острого угла, равен $1\frac{5}{11}d$. Определить углы параллелограмма

18. Середины E и F параллельных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми с вершинами D и B (черт 12). Доказать, что

эти прямые делят диагональ AC на три равные части

19. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Доказать, что пери-



Черт 12.

метр получившегося параллелограмма не зависит от положения точки и равен сумме боковых сторон треугольника

**Прямоуголь-
ник.**

20. В прямоугольнике диагональ образует со стороной угол, равный $\frac{2}{5}d$. Определить угол между диагоналями, обращенный к меньшей стороне.

21. В прямоугольнике определить угол между меньшей стороной и диагональю, если он на $\frac{1}{3}d$ меньше угла между диагоналями, опирающегося на ту же сторону.

22. Существует ли внутри прямоугольника точка, одинаково удаленная: 1) от всех его сторон? 2) от всех его вершин?

23. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр этого прямоугольника равен 56 см. Определить его стороны.

24. В прямоугольнике диагонали пересекаются под углом в $\frac{2}{3}d$. Сумма обеих диагоналей и обеих меньших сторон равна 3,6 м. Определить длину диагоналей.

25. $ABCD$ — данный прямоугольник; M — середина стороны BC . Дано, что прямые MA и MD взаимно перпендикулярны и что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24 м. Определить его стороны.

26. Дан прямоугольник; перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на две части в отношении 3:1. Найти угол между этим перпендикуляром и другой диагональю

27. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найти периметр прямоугольника.

28. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Определить стороны прямоугольника, если известно, что они относятся, как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45 см.

29. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит ее в отношении 1:3. Определить длину диагонали, если известно, что точка её пересечения с другой диагональю удалена от большей стороны на 2 м.

30. Построить прямоугольник:

- 1) по основанию, равному $2,4\text{ см}$, и диагонали, равной $3,1\text{ см}$;
- 2) по диагонали, равной $4,2\text{ см}$, и углу между диагоналями, равному 135° ;
- 3) по основанию, равному $3,2\text{ см}$, и углу между диагоналями, равному 120° .

Геометрическое место точек, равноудалённых от прямой.

31. Найти на данной прямой AB точку, которая находится на расстоянии m ($=2\text{ см}$) от другой данной прямой CD .

32. Найти точку, находящуюся на равном расстоянии от двух данных точек и на расстоянии a ($=6\text{ см}$) от данной прямой.

33. Внутри данного угла найти точку, находящуюся на расстояниях m ($=1\text{ см}$) и n ($=2\text{ см}$) от сторон угла.

34. 1) Внутри данного угла построен другой, одноимённый угол, стороны которого параллельны сторонам данного и равно отстоят от них. Доказать, что биссектрисы обоих углов совпадают.

2) Разделить пополам угол, вершина которого не помещается на чертеже.

35. Между сторонами данного острого угла поместить отрезок данной длины так, чтобы он был перпендикулярен к одной стороне угла.

Ромб.

36. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Определить углы ромба.

37. Доказать, что:

1) всякий параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, есть ромб;

2) всякий параллелограмм, у которого диагональ делит угол пополам, есть ромб.

38. Сторона ромба образует с его диагоналями углы, разность которых равна $\frac{3}{17}d$. Определить углы ромба.

39. Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся, как $5:4$. Определить углы ромба.

40. Определить углы ромба, если высота, проведённая из вершины тупого угла, делит противоположную сторону пополам.

41. Периметр ромба равен 8 см , высота 1 см . Найти тупой угол ромба.

42. Построить ромб:

- 1) по стороне, равной $2,7\text{ см}$, и диагонали, равной $6,0\text{ см}$;
- 2) по двум диагоналям, равным 4 см и 3 см ;
- 3) по высоте, равной $2,2\text{ см}$, и диагонали, равной $4,2\text{ см}$;
- 4) по углу, содержащему 70° , и диагонали, проходящей через вершину этого угла и равной $3,7\text{ см}$;
- 5) по диагонали, равной 5 см , и противолежащему углу, равному 120° .

Квадрат.

43. Построить квадрат по диагонали, равной $3,8\text{ см}$.

44. Дан квадрат $ABCD$. На каждой из его сторон отложены равные части: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 соединены последовательно прямыми. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ есть также квадрат.

45. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого 2 м , вписан квадрат, имеющий с ним один общий угол. Найти периметр квадрата.

46. В прямоугольном треугольнике прямой угол разделён пополам; из точки пересечения биссектрисы и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Доказать, что четырёхугольник, образованный этими прямыми и катетами, есть квадрат.

47. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а другие две — на катетах. Определить сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 3 м .

48. Дан квадрат, сторона которого 1 м ; диагональ его служит стороной другого квадрата. Найти диагональ последнего.

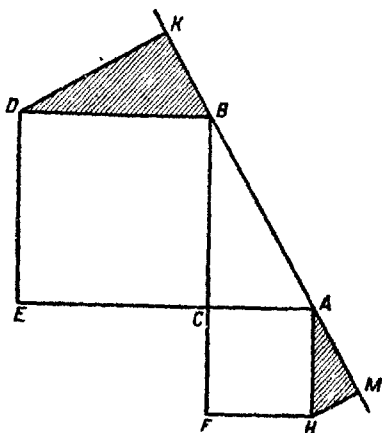
49. Диагональ квадрата равна 4 м . Сторона его служит диагональю другого квадрата. Найти сторону последнего.

50. 1) Доказать, что биссектрисы углов прямоугольника своим пересечением образуют квадрат.

2) Стороны прямоугольника 1 см и 3 см . Определить диагонали четырёхугольника, образованного биссектрисами внутренних углов.

51. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Определить стороны этого прямоугольника, зная, что одна из них вдвое более другой и что диагональ квадрата равна 12 м .

52. На катетах прямоугольного треугольника ABC построены два квадрата (черт. 13). Из вершин D и H этих квадратов на продолжение гипотенузы опущены два перпендикуляра: DK и HM . Доказать, что: 1) данный треугольник ABC можно составить из двух заштрихованных треугольников; 2) сумма перпендикуляров HM и DK равна гипотенузе.



Черт. 13.

Средняя линия
треугольника.

53. На половине длины стропильных ног, концы которых раздвинуты на 5 м, устроена затяжка (ригель). Определить её длину.

54. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 12 см. Найти стороны треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.

55. Периметр треугольника равен 12 см; середины сторон соединены последовательно. Найти периметр полученного треугольника.

56. Стороны треугольника относятся, как 3:4:6. Соединив середины всех сторон, получим треугольник с периметром в 5,2 м. Определить стороны данного треугольника.

57. По разные стороны от данной прямой MN даны две точки A и B на расстояниях 10 дм и 4 дм от неё. Найти расстояние середины O отрезка AB от данной прямой.

58. Высота равностороннего треугольника равна 6 дм. Найти проекцию данной высоты на другую высоту.

59. Через вершину тупого угла тупоугольного треугольника проведена вне его прямая; проекции прилежащих к тупому углу сторон на эту прямую равны 4 см и 2 см. Определить проекции всех медиан на ту же прямую.

60. Внутри произвольного угла взята точка M . Провести через точку M прямую так, чтобы отрезок её, заключённый между сторонами угла, делился в точке M пополам.

Трапеция.

61. В трапеции $ABCD$ из вершины B проведена прямая, параллельная боковой стороне CD , до встречи в точке E с большим основанием AD . Периметр треугольника ABE равен 1 м, и длина ED равна 3 дм. Определить периметр трапеции.

62. Боковая сторона трапеции разделена на 6 равных частей, и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию. Определить длины этих отрезков, если основания трапеции равны 10 см и 28 см.

63. В трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) дано: $AC \perp CD$; $AB = BC$; $\angle CAD = \frac{2}{7}d$. Определить углы этой трапеции.

64. В трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) диагональ AC перпендикулярна к стороне CD и делит $\angle BAD$ пополам; $\angle CDA = 60^\circ$; периметр трапеции равен 2 м. Определить AD .

65. Пусть AD означает большее основание трапеции $ABCD$. Могут ли углы A , B , C и D относиться между собой, как 2:5:6:3?

Средняя линия трапеции.

66. Основания трапеции относятся, как 7:3, и разнятся на 3,2 м. Найти длину средней линии этой трапеции.

67. Основания трапеции равны 2,4 м и 3 м. Внутри этой трапеции проведена между боковыми сторонами прямая, параллельная основаниям, которая равна 2,8 м. Одинаково ли удалена эта прямая от обоих оснований и если нет, то к какому основанию она ближе?

68. В трапеции $ABCD$ из середины E боковой стороны AB проведена прямая, параллельная основаниям, до встречи в точке F с боковой стороной CD ; из вершины B проведена прямая, параллельная стороне CD , до встречи в точке G с большим основанием AD . Определить длину оснований, если $EF = 12$ см и $AG = 1$ см.

69. В трапеции $ABCD$ из середины E боковой стороны AB проведена прямая, параллельная боковой стороне CD , до встречи в точке G с большим основанием AD . Определить основания трапеции, если $AG = 5$ дм и $GD = 2,5$ м.

70. Средняя линия трапеции равна 8 дм и делится диагональю на два отрезка, разность между которыми равна 2 дм. Определить основания трапеции.

71. Найти отношение между параллельными сторонами трапеции, в которой средняя линия делится двумя диагоналями на 3 равные части.

Равнобедренная трапеция.

72. Доказать, что в равнобедренной трапеции углы при основаниях равны.

73. В данной равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр содержит 24 м. Определить боковую сторону.

74. Определить углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна $\frac{8}{13}d$.

75. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна к боковой стороне. Определить углы трапеции.

76. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, причём AD — большее основание. Разность между периметрами треугольников ACD и BAC равна 6 дм, а средняя линия трапеции равна 12 дм. Определить основания.

77. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам; периметр этой трапеции равен 4,5 м, а большее основание равно 1,5 м. Определить меньшее основание.

78. В равнобедренной трапеции высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки в 6 см и 30 см. Определить основания этой трапеции.

79. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, причём AD — большее основание; CE — высота, проведённая на AD . Зная, что DE равно 1,25 м и что средняя линия трапеции равна 2,75 м, определить основания.

80. В равнобедренной трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними равен 60° . Определить меньшее основание.

81. В равнобедренной трапеции острый угол равен 45° , высота её равна h метрам, а средняя линия равна m метрам. Определить основания трапеции.

82. В равнобедренной трапеции высота равна 10 см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти среднюю линию.

Прямоугольная трапеция.

83. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равнобедренный со стороной a и прямоугольный. Определить среднюю линию трапеции.

84. В прямоугольной трапеции $ABCD$ острый угол $ADC = \frac{1}{2}d$ и сторона $AD = a$. Из середины E стороны CD проведён к ней перпендикуляр, который встречает продолжение стороны BA в точке F . Требуется определить длину BF .

Построение трапеции.

85. Построить трапецию:

1) по двум боковым сторонам, равным $1,5\text{ см}$ и 2 см , и основаниям, равным 5 см и $2,3\text{ см}$;

2) по одному из оснований, равному $4,8\text{ см}$, высоте, равной $3,2\text{ см}$, и двум диагоналям, равным $4,2\text{ см}$ и 5 см ;

3) по основанию, равному 4 см , боковой стороне, равной $2,4\text{ см}$, углу между ними, содержащему 72° , и другой боковой стороне, равной 3 см .

86. Построить трапецию:

1) по четырём сторонам (всегда ли построение возможно?);

2) по двум основаниям и по двум диагоналям (условие возможности построения?).

Смешанные задачи на параллелограммы и трапеции.

87. Определить вид четырёхугольника, вершинами которого служат середины сторон данного: 1) произвольного четырёхугольника; 2) параллелограмма; 3) прямоугольника; 4) ромба; 5) квадрата; 6) трапеции.

88. В четырёхугольнике диагонали равны 1 м и 8 дм и пересекаются под углом в $56^\circ 25'$. Определить стороны и углы четырёхугольника, который получим, соединяя середины сторон данного.

89. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D ; прямая, проведённая из D параллельно CA , пересекает AB в точке E ; прямая, проведённая из E параллельно BC , пересекает AC в F . Доказать, что $EA = FC$.

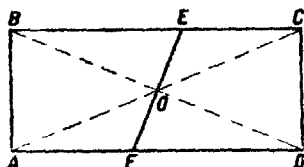
90. 1) На основании равнобедренного треугольника взята точка. Доказать, что сумма расстояний этой точки от обеих боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону.

2) На продолжении основания равнобедренного треугольника взята точка. Доказать, что разность расстояний этой точки от боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону.

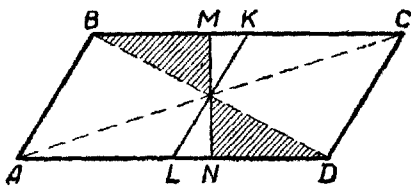
**Центральная
симметрия.**

91. Найти наименьший угол поворота, при котором совмещаются самис собой:
1) квадрат; 2) ромб; 3) прямоугольник;
4) пятиконечная звезда.

92. Доказать, что прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей прямоугольника (черт. 14), делит прямоугольник на два центрально-симметричных четырёхугольника.



Черт. 14



Черт. 15.

93. Рассмотреть чертеж (черт. 15) и доказать, что точки M и N , K и L центрально-симметричны, т. е. находятся на одинаковом расстоянии от центра. Каким построением получаются в параллелограмме центрально-симметричные точки?

§ 6. Окружность.

**Окружность,
её положение.
Диаметр, хор-
да и её рас-
стояние от
центра. Секу-
щая.**

1. На сторонах угла ABC , равного 120° , отложены отрезки $AB=BC=4$ см. Провести окружность через точки A , B и C и найти, чему равен её радиус.

2. Найти геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

3. Провести окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

4. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B так, чтобы угол между радиусом круга, проведённым в точку A , и хордой AB был равен 30° .

5. 1) Радиус окружности равен 10 см, данная точка удалена от центра на 15 см. Найти её наименьшее и наибольшее расстояния от окружности.

2) Радиус окружности равен 10 см, данная точка удалена от центра на 3 см. Найти её наименьшее и наибольшее расстояния от окружности.

6. Наименьшее расстояние данной точки от окружности равно a , наибольшее равно b . Определить радиус (два случая).

7. Доказать, что кратчайшее расстояние между двумя окружностями, лежащими одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключённый между окружностями.

8. Из точки, данной на окружности, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найти угол между ними.

9. Из точки, данной на окружности, проведены две хорды; каждая из них равна радиусу. Найти угол между ними.

10. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды; каждая из них делится другой на два отрезка в 3 см и 7 см. Найти расстояние каждой хорды от центра.

11. В круге на расстоянии 1 см от центра даны две взаимно перпендикулярные хорды; каждая из них равна 6 см. Найти, на какие части одна хорда делится другой.

12. В круге радиуса R даны два взаимно перпендикулярных диаметра; произвольная точка окружности спроектирована на эти перпендикуляры. Найти расстояние между проекциями точки.

13. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка в 2 см и 6 см. Найти расстояние хорды от центра.

14. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и на 10 см. Определить их длину.

15. Концы диаметра удалены от касательной на 1,6 м и на 0,6 м. Определить длину диаметра.

16. В круге с центром O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC , равное радиусу. Через точку C и центр O проведена секущая CD (D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Доказать, что угол AOD равен утроенному углу ACD .

17. 1) Дан круг, радиус которого равен 2 см. Провести в нём хорду длиной в 1,5 см. Определённая ли эта задача? Сколько решений будет иметь задача, если хорда данной длины должна проходить через данную точку окружности?

2) Показать, что середины всех хорд данной длины, проведённых в данной окружности, лежат на некоторой другой окружности.

18. 1) Доказать, что из всех хорд, проходящих через точку A , взятую внутри круга, наименьшей будет та, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через A .

2) Через данную в круге точку провести хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

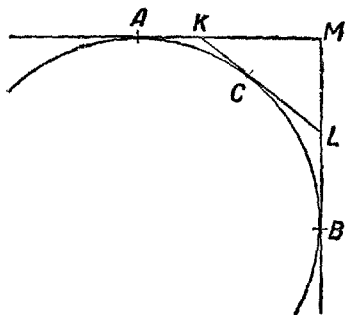
19. Описать окружность с центром в данной точке на стороне данного угла, которая на другой стороне угла отсекала бы хорду данной длины.

20. В данном круге проведены две равные параллельные между собой хорды, расстояние между которыми равно радиусу данного круга. Найти острый угол между прямыми, соединяющими концы хорд.

**Касательная.
Сопряжение
прямых и
окружностей.**

21. 1) Из внешней точки проведены к кругу две взаимно перпендикулярные касательные; радиус круга $R = 10$ см. Найти длину каждой касательной.

2) Дан круг радиуса $R = 1$ дм; из внешней точки M к нему проведены две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB (черт. 16). Между точками касания A и B на дуге AB взята произвольная точка C и через неё проведена третья касательная KL , образующая с касательными MA и MB треугольник KLM . Найти периметр этого треугольника.



Черт. 16.

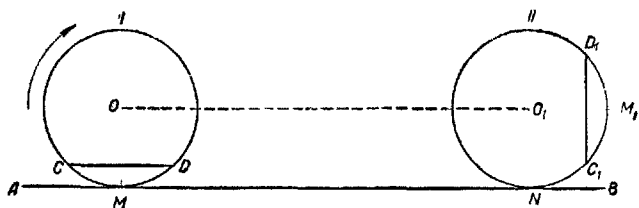
22. Дан сектор, равный четверти круга радиуса R . Определить длину касательной, проведённой в середине его дуги до пересечения с продолжениями крайних радиусов сектора.

23. В прямой угол вписан круг; хорда, соединяющая точки касания, равна 2 дм. Найти расстояние этой хорды от центра круга.

24. AB и AC — касательные к одной окружности; $\angle BAC$ равен 60° ; ломаная линия BAC равна 1 м. Определить расстояние между точками касания B и C .

25. Окружность круга равна 18,84 см; круг катится по прямой AB (черт. 17). На сколько передвинется центр круга,

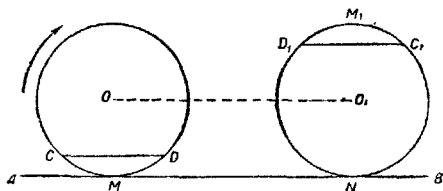
если круг из положения I перейдёт в положение II? В положении I хорда $CD \parallel AB$, а в положении II хорда $C_1D_1 \perp AB$.



Черт. 17.

26. Окружность круга равна $18,84$ см. Круг катится по прямой AB ; на сколько передвинется его центр O , если хорда его из первоначального положения $CD \parallel AB$ перейдёт в положение $C_1D_1 \parallel AB$ (черт. 18)?

27. Радиусы двух кругов равны 2 см и 4 см; их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найти длину каждой из них.



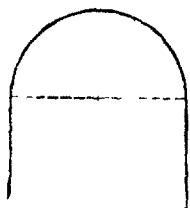
Черт. 18.

28. Даны два круга, их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны; хорды, соединяющие точки касания, равны 3 см и 5 см. Определить расстояние между центрами.

29. Даны два круга-радиусов R и r , один вне другого; к ним проведены две общие внешние касательные. Найти их длину (между точками касания), если их продолжения образуют прямой угол ($R > r$).

30. Дан угол в 30° . Построить окружность радиуса $2,5$ см, касающуюся одной стороны этого угла и имеющую центр на другой его стороне. Вычислить расстояние центра окружности от вершины угла.

31. Начертить выпуклую фигуру из двух параллельных прямых, сопрягаемых полуокружностью. Такая фигура назы-



Черт. 19.

вается в архитектуре „валиком“, если диаметр полуокружности вертикален, и „аркой“, если он горизонтален (черт. 19).

32. Соединить две непараллельные прямые сопрягающей их дугой. Рассмотреть три случая: 1) когда точки соединения (точки касания) и радиус дуги не даны; 2) когда дан только радиус дуги; 3) когда дана точка соединения, а радиус не дан (примеры такого соединения прямых дугами представляют закругления железнодорожного пути).

33. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой.

34. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой в данной точке.

35. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку A и касалась бы данной прямой в данной на ней точке B .

36. Описать окружность, которая касалась бы сторон данного угла, причём одной из них — в данной точке.

37. Между двумя параллельными прямыми дана точка; провести окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.

38. Даны две параллельные прямые и секущая. Провести окружность, касающуюся всех трёх прямых.

39. Данным радиусом описать окружность, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

40. Две прямые исходят из одной и той же точки M и касаются окружности в точках A и B . Проведя радиус OB , продолжат его за точку B на расстоянии $BC = OB$. Доказать, что $\angle AMC = 3 \angle BMC$.

41. Какое относительное положение занимают две окружности, если:

1) расстояние между центрами 10 см, а радиусы 8 см и 2 см?

2) расстояние между центрами 4 см, а радиусы 1 см и 7 см?

3) расстояние между центрами 12 см, а радиусы 5 см и 3 см?

42. Радиусы двух окружностей относятся, как 5:3; при внутреннем их касании расстояние между центрами равно 6 дм. Узнать относительное положение тех же окружностей, если

Относительное
положение
двух окружностей.

расстояние между центрами будет: 1) 24 дм; 2) 5 дм; 3) 28 дм; 4) 20 дм.

43. Даны два круга — один внутри другого; через их центры проведён в большом круге диаметр, который окружностью меньшего круга делится на три части: 5 см, 8 см, 1 см. Найти расстояние между центрами.

44. Наименьшее расстояние между двумя концентрическими окружностями равно 2 см, а наибольшее 16 см. Определить радиусы этих окружностей.

45. Даны два концентрических круга; в большем круге даны две взаимно перпендикулярные хорды, касательные к меньшему; каждая из хорд делится другой на две части: 3 см и 7 см. Найти радиус меньшего круга.

46. Радиусы двух концентрических окружностей относятся, как 7:4, а ширина кольца равна 12 см. Определить радиус меньшей окружности.

47. Если пересечь два концентрических круга секущей, то части секущей, лежащие между окружностями, равны между собой. Доказать.

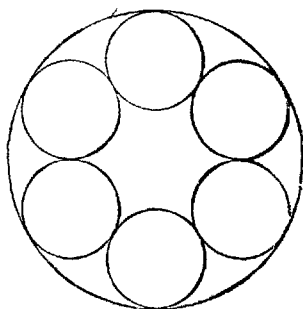
48. Одна окружность находится внутри другой; радиусы их равны 28 см и 12 см, а кратчайшее расстояние между ними равно 10 см. Определить расстояние между центрами.

49. 1) Три равных круга радиуса R касаются друг друга извне. Определить стороны и углы треугольника, вершинами которого служат точки касания.

2) Вписать в данный круг три равных круга, которые касались бы попарно между собой и данного круга.

50. Два равных круга внутренне касаются третьего круга и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром в 18 см. Определить радиус большего круга.

51. В данный круг, радиус которого равен 3 дм, вписано шесть равных кругов (черт. 20), из которых каждый касается данного круга и двух соседних кругов. Найти их диаметры. Сделать чертеж.



Черт. 20.

52. Около круга радиуса 1 дм проведены с наружной стороны шесть равных кругов, из которых каждый касается данно-го круга и двух соседних. Найти их радиусы. Сделать чертёж.

**Построение
окружностей
и дуг.**

53. 1) Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке.

2) Провести окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

54. 1) Найти геометрическое место центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности.

2) Данным радиусом провести окружность, которая касалась бы данной прямой и данного круга.

55. Соединить данную прямую и данную дугу сопрягающей дугой данного радиуса; точки соединения (точки касания) не даны.

56. Соединить две данные дуги сопрягающей дугой данного радиуса; точки касания не даны.

57. Описать окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

58. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы часть её, заключённая внутри окружностей, имела данную длину.

§ 7. Измерение углов дугами.

**Центральный
угол.**

1. 1) Большее колесо зубчатой передачи имеет 72 зубца. Сколько градусов окружности колеса занимает один зубец колеса вместе со впадиной?

2) Меньшее колесо зубчатой передачи имеет 24 зубца. Сколько градусов содержит дуга, занимаемая одним зубцом колеса вместе со впадиной?

3) Какую часть оборота сделает большее колесо с 72 зубцами, когда сцеплённое с ним, меньшее, имеющее 24 зубца, сделает один полный оборот?

2. Выразить в градусах, минутах и секундах следующие части окружности: 1) $\frac{1}{72}$; 2) $\frac{1}{81}$; 3) 0,001; 4) $\frac{1}{11}$; 5) $\frac{5}{11}$.

3. Найти, какую часть окружности составляют дуги: 1) 15° ; 2) $22^\circ 30'$; 3) 108° ; 4) $24'$; 5) $18''$; 6) $18^\circ 45'$; 7) $2^\circ 30''$; 8) $10^\circ 40''$.

4. Определить угол между стрелками на часах, когда часы показывают: 1) 5 час.; 2) 3 час. 25 мин.; 3) 4 час. 50 мин.

5. Хорда стягивает дугу в 90° и равна 16 см. Определить её расстояние от центра.

6. В окружности, радиус которой 1,4 м, определить расстояние от центра до хорды, стягивающей дугу в 120° .

7. Угол между двумя радиусами содержит $102^\circ 37''$. Определить угол между касательными, проведёнными через концы этих радиусов.

8. Дуга AB содержит $73^\circ 27'$; из её конца B проведена касательная до встречи в точке C с продолжением радиуса OA . Определить $\angle ACB$.

Вписанный
угол.

9. Сколько градусов и минут содержит дуга, если радиус, проведённый в конец её, составляет с её хордой угол в $37^\circ 23'$?

10. Дуга содержит $117^\circ 23'$. Определить угол между хордой и продолжением радиуса, проведённого в конец дуги.

11. ABC — секущая; BD — хорда; $\cup BD$ содержит 43° ; $\cup BDC$ содержит $213^\circ 41'$. Определить $\angle ABD$.

12. Вычислить угол, вписанный в дугу, составляющую $\frac{17}{32}$ окружности.

13. Сколько градусов и минут содержит дуга, которая вмещает угол, равный $37^\circ 21'$?

14. Дуга содержит $84^\circ 52'$. Под каким углом из точек этой дуги видна её хорда?

15. Хорда делит окружность в отношении 5:11. Определить величину вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

16. AB и AC — две хорды: $\cup AB$ содержит $110^\circ 23'$; $\cup AC$ содержит 38° . Определить $\angle BAC$. (Два ответа.)

17. Хорда AB делит окружность на две дуги, из которых меньшая равна 130° , а большая делится хордой AC в отношении 31:15 (начиная от A). Определить $\angle BAC$.

18. Хорды AB и AC лежат по разные стороны центра и заключают $\angle BAC$, равный $72^\circ 30'$; $\cup AB : \cup AC = 19 : 24$. Определить эти дуги.

19. Окружность разделена в отношении 7:11:6, и точки деления соединены между собой. Определить углы полученного треугольника.

**СОВЕТСКИЕ УЧЕБНИКИ
БОЛЬШОЙ СКЛАД НА САЙТЕ
«СОЕТСКОЕ ВРЕМЯ»
SOVIETIME.RU**



**СКАЧАТЬ! с
SOVIETIME.RU**

20. Определить, сколько градусов содержит дуга, если перпендикуляр, проведённый к хорде из её конца, делит дополнительную (до окружности) дугу в отношении 5:2.

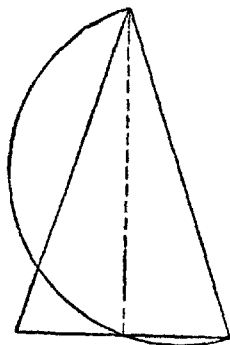
21. Если в треугольнике медиана равна половине соответствующей стороны, то угол против этой стороны прямой. Доказать это с помощью вспомогательной окружности.

22. Точки A и B соединены двумя дугами, обращёнными выпуклостями в разные стороны: $\cup ACB$ содержит $117^\circ 23'$ и $\cup ADB$ содержит $42^\circ 37'$; середины их C и D соединены с A . Определить $\angle CAD$.

23. Доказать, что всякая трапеция, вписанная в круг, — равнобочная.

24. В сегмент AMB вписана трапеция $ACDB$, у которой сторона $AC = CD$ и $\angle CAB = 51^\circ 20'$. Сколько градусов содержит дуга AMB ?

25. AB — диаметр; C, D и E — точки на одной полуокружности $ACDEB$. На диаметре AB взяты: точка F так, что $\angle CFA = \angle DFB$, и точка G так, что $\angle DGA = \angle EGB$. Определить $\angle FDG$, если $\cup AC$ содержит 60° и $\cup BE$ содержит 20° .



Черт. 21.

26. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40° . Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три части (черт. 21). Найти эти части.

27. Основание равносностороннего треугольника служит диаметром окружности.

На какие части делятся стороны треугольника полуокружностью и полуокружность — сторонами треугольника?

28. Построить несколько точек окружности, имеющей данный диаметр, пользуясь лишь чертёжным треугольником.

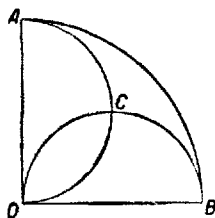
29. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе $c = 5$ см и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу и имеющей длину 2 см.

30. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе, равной 3,5 см, и проекции одного из катетов на гипотенузу, если эта проекция равна 2,9 см.

31. Найти геометрическое место середин всех хорд, пересекающихся в одной точке. Рассмотреть два случая: 1) точка на окружности; 2) точка внутри окружности.

32. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Радиусы и касательные, проведённые через концы образовавшихся хорд, параллельны. Доказать

33. На радиусах OA и OB четверти круга AOB построены (как на диаметрах) полуокружности ACO и OCB (черт. 22). Доказать, что: 1) прямая OC делит угол AOB пополам; 2) точки A , C и B лежат на одной прямой; 3) дуги AC , CO и CB равны между собой.



Черт. 22.

34. Через конец хорды, делящей окружность в отношении 3:5, проведена касательная. Определить острый угол между хордой и касательной.

35. AB и AC — равные хорды, MAN — касательная; $\cup BC$, на которой не лежит точка A , содержит $213^\circ 42'$. Определить углы MAB и NAC .

36. C — точка на продолжении диаметра AB ; CD — касательная; $\angle ADC = 114^\circ 25'$. Сколько градусов и минут содержит $\cup BD$?

37. AB — диаметр окружности; BC — касательная. Секущая AC делится окружностью (в точке D) пополам. Определить $\angle DAB$.

38. M — середина высоты BD в равнобедренном треугольнике ABC ; точка M служит центром дуги, описанной радиусом MD между сторонами BA и BC . Определить градусную величину этой дуги, если известно, что $\angle BAC = 62^\circ 17'$.

39. Окружность разделена точками A, B, C и D так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 2 : 3 : 5 : 6$. Проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке M . Определить $\angle AMB$.

40. Диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке M ; $\angle CMB = 73^\circ$; $\cup BC$ содержит 110° . Сколько градусов содержит $\cup BD$?

41. Хорды AB и CD пересекаются в точке M ; $\angle AMC = 40^\circ$; $\cup AD$ более $\cup CB$ на $20^\circ 54'$. Определить $\cup AD$.

Угол с вершиной внутри круга и вне круга. Описанный угол.

42. Из концов $\cup AB$, содержащей m° , проведены хорды AC и BD так, что $\angle DMC$, образуемый их пересечением, равен $\angle DNC$, вписанному в $\cup CD$. Определить эту дугу.

43. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D — прямые; диагональ AC образует со стороной AB угол в 40° , а со стороной AD — угол в 30° . Определить острый угол между диагоналями AC и BD .

44. Окружность разделена точками A, B, C и D так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Хорды AD и BC продолжены до пересечения в точке M . Определить $\angle AMB$.

45. Дана окружность с хордой и касательной, причём точка касания лежит на меньшей из двух дуг, стягиваемых хордой. Найти на касательной точку, из которой хорда видна под наибольшим углом.

46. Секущая ABC отсекает $\cup BC$, содержащую 112° ; касательная AD точкой касания D делит эту дугу в отношении $7 : 9$. Определить $\angle BAD$.

Указание (для некоторых следующих задач). Определяя описанный угол, полезно помнить следующее: тот угол между двумя касательными, внутри которого заключена окружность, служит дополнением до 180° к углу между радиусами, проведёнными в точке касания.

47. Из концов дуги в $200^\circ 30'$ проведены касательные до взаимного пересечения. Определить угол между ними.

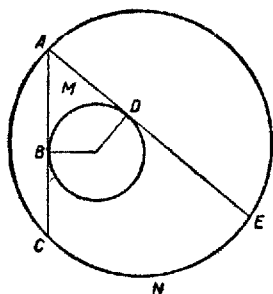
48. Описанный угол содержит $73^\circ 25'$. Определить дуги, заключённые между его сторонами.

49. Хорда делит окружность в отношении $11 : 16$. Определить угол между касательными, проведёнными из концов этой хорды.

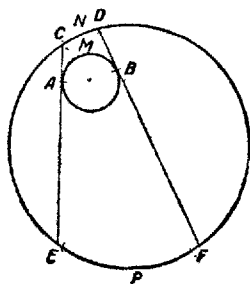
50. Внутри данной окружности (черт. 23) помещается другая окружность. ABC и ADE — хорды большей окружности, касающиеся в точках B и D меньшей окружности; BMD — меньшая из дуг между точками касания; CNE — дуга между концами хорд. Определить $\cup CNE$, если $\cup BMD$ содержит 130° .

51. Внутри данной окружности (черт. 24) находится другая окружность, CAE и DBF — две хорды большей окружности (не пересекающиеся), касающиеся меньшей окружности

в точках A и B ; AMB — меньшая из дуг между точками касания; CND и EPF — дуги между концами хорд. Сколько



Черт. 23.



Черт. 24.

градусов содержит $\cup CND$, если $\cup AMB$ содержит 154° и $\cup EPF = 70^\circ$?

52. Окружность разделена в отношении 5:9:10, и через точки деления проведены касательные. Определить больший угол в полученном треугольнике.

53. AB и AC — две хорды, образующие $\angle BAC$ в $72^\circ 24'$. Через точки B и C проведены касательные до пересечения в точке M . Определить $\angle BMC$.

54. Определить величину описанного угла, если расстояние (кратчайшее) от его вершины до окружности равно радиусу.

55. Дуга AB содержит $40^\circ 24'$. На продолжении радиуса OA отложена часть AC , равная хорде AB , и точка C соединена с B . Определить $\angle ACB$.

56. В треугольнике ABC угол C — прямой. Из центра C радиусом AC описана $\cup ADE$, пересекающая гипотенузу в точке D , а катет CB — в точке E . Определить дуги AD и DE , если $\angle B = 37^\circ 24'$.

Сегмент, вмещающий данный угол.

57. Треугольники ABC и ADC имеют общую сторону AC ; стороны AD и BC пересекаются в точке M . Углы B и D равны между собой и содержат по 40° . Расстояние между вершинами B и D равно стороне AB ; $\angle AMC = 70^\circ$. Определить углы треугольников ABC и ADC .

58. На данной прямой MN найти точку, из которой данный отрезок AB был бы виден под данным углом.

59. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте.

60. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведённой к основанию.

61. Даны по величине и положению два отрезка: a и b . Найти такую точку, из которой отрезок a был бы виден под данным углом A , отрезок b — под данным углом B .

62. Построить параллелограмм по его углу и диагоналям.

**Вписанный и
описанный
треугольники.**

63. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4 м. Определить радиус описанной окружности.

64. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2 см; угол при вершине равен 120° . Определить диаметр описанной окружности.

65. Пусть будет O — центр круга, описанного около треугольника ABC . Определить $\angle OAC$: 1) если $\angle B = 50^\circ$; 2) если $\angle B = 126^\circ$.

66. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 25° . Под каким углом виден каждый его катет из центра описанной окружности?

67. Два угла треугольника равны 100° и 50° . Под каким углом видна каждая сторона треугольника из центра вписанной окружности?

68. Треугольник ABC — равнобедренный; радиус описанного круга OA образует с основанием AC угол OAC , равный $20^\circ 38'$. Определить $\angle BAC$. (Два случая.)

69. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанного круга.

70. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанного круга в отношении 7:5 (начиная от вершины). Найти отношение боковой стороны к основанию.

71. В прямоугольном равнобедренном треугольнике обозначим радиус вписанного круга через r , а половину периметра — через p . Требуется определить гипотенузу.

72. Около данного круга описать равнобедренный прямоугольный треугольник.

73. Около круга, радиус которого равен 4 см, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 26 см. Найти периметр треугольника.

74. В данный круг вписать треугольник, у которого даны два угла.

75. Около данного круга описать треугольник, у которого даны два угла.

Вписанный и
описанный
четырёхуголь-
ники.

76. Меньшая сторона прямоугольника равна 1 м; острый угол между диагоналями равен 60° . Найти радиус описанного круга.

77. В прямоугольнике диагональ образует со стороной угол в $12^\circ 35'$. На какие четыре части делится вершинами этого прямоугольника описанная около него окружность?

78. Вписать круг в данный ромб.

79. Сторона ромба равна 8 см; острый угол его содержит 30° . Определить радиус вписанного круга.

80. В ромб вписана окружность. На какие четыре части она делится точками касания сторон, если острый угол ромба равен 37° ?

81. В равнобедренной трапеции угол при основании равен 50° , а угол между диагоналями, обращённый к боковой стороне, равен 40° . Где лежит центр описанной окружности: внутри или вне трапеции?

82. Около круга описана трапеция, периметр которой равен 12 см. Определить среднюю линию этой трапеции.

83. Около круга описана равнобедренная трапеция с углом 30° . Средняя линия её равна 1 м. Определить радиус круга.

84. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна к диагонали BD и делит её пополам. Определить углы этого четырёхугольника, если $\angle BAD = 70^\circ 23' 42''$.

85. Можно ли описать окружность около четырёхугольника, углы которого по порядку относятся: 1) как 2:4:5:3; 2) как 5:7:8:9?

86. Центральный угол сектора равен 60° , а радиус равен R . Определить радиус круга, вписанного в этот сектор.

87. В четырёхугольнике $ABCD$ дано: $\angle ABC = 116^\circ$; $\angle ADC = 64^\circ$; $\angle CAB = 35^\circ$ и $\angle CAD = 52^\circ$. Определить угол между диагоналями, опирающийся на сторону AB .

88. 1) Три стороны описанного четырёхугольника относятся (в последовательном порядке), как 1:2:3. Опреде-

лить стороны, если известно, что периметр его равен 24 м.

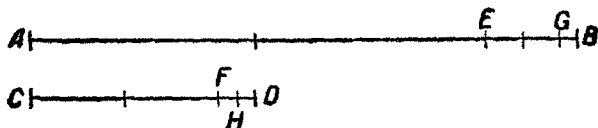
2) Три угла вписанного четырёхугольника (в последовательном порядке) относятся, как 1:2:3. Определить углы четырёхугольника

§ 8. Пропорциональные отрезки. Свойство биссектрисы в треугольнике.

Пропорциональные отрезки.

1. Найти при помощи последовательного откладывания отношение отрезка AB к отрезку CD (черт. 25).

2. Найти (с точностью до 0,01) отношение высоты равностороннего треугольника к его стороне.



Черт. 25.

3. 1) Точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB=1:2$. Найти отношение $AM:AB$ и $MB:AB$.

2) Точка K делит некоторый отрезок AB в отношении $m:n$. Найти отношение $AK:AB$ и $KB:AB$.

4. На отрезке AB длиной 6 см дана точка C , расстояние которой от A равно 3,6 см; на продолжении отрезка AB за точку B найти такую точку D , чтобы расстояние ее от A относилось к расстоянию её от B , как $AC:CB$.

5. Две параллельные улицы пересечены двумя улицами, выходящими из одной точки A . Части параллельных улиц, заключённые между лучевыми улицами, равны 0,75 км и 1,25 км. Трамвай идет по одной из лучевых улиц от точки A до первой параллельной улицы 15 мин. Сколько времени он при той же скорости будет идти по той же лучевой улице от первой до второй параллельной улицы?

6. Стороны угла A пересечены двумя параллельными прямыми BC и DE (через B и D обозначены точки на одной стороне угла). Требуется:

1) Определить AE , если $AB=8$ м, $AD=12$ м и $AC=10$ м;

2) определить AB , если $AB + AD = 21$ м, $AC = 12$ м и $AE = 16$ м;

3) определить AD , если $AC:AE = \frac{3}{11}:0,6$ и $BD = 12$ дм.

7. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке M . Требуется:

1) определить отрезок CM , если $AB = 1$ м, $CD = 15$ дм и $BM = 8$ дм;

2) определить отрезок BM , если сторона $AB = 1,2$ м и $CD:CM = \frac{1}{6}:0,25$;

3) определить CD , если $AB:BM = 17:9$ и $CD - CM = 1,6$ м.

8. BA и BD — отрезки одной стороны угла B ; BC и BE — отрезки другой стороны его. Узнать, параллельны ли прямые AC и DE :

1) если $BA:AD = 3:4$, $BC = 1,2$ м и $BE = 2,8$ м;

2) если $BD:AD = 11:8,5$ и $BC = \frac{5}{17} CE$;

3) если $BA = \frac{7}{13} BD$, $BC = 2,8$ м и $CE = 2$ м.

9. 1) Боковая сторона треугольника разделена на пять равных частей, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. Основание равно 20 см. Определить отрезки параллельных прямых, заключённые между боковыми сторонами.

2) В трапеции боковая сторона разделена на восемь равных частей, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию, до пересечения с другой боковой стороной. Основания трапеции равны 50 см и 30 см. Найти длины отрезков параллельных прямых между боковыми сторонами.

10. Основания трапеции 1,8 м и 1,2 м; боковые стороны её длиной 1,5 м и 1,2 м продолжены до взаимного пересечения. Определить, на сколько продолжены боковые стороны.

11. Чтобы измерить высоту дерева (черт. 26), проведя ¹⁾ на некотором расстоянии от ствола прямую и на ней в некоторых точках её втыкают в землю два кола так,

¹⁾ То есть отмечают шестью-вехами.

нами угла, имели данное отношение $m:n$. (Рассмотреть особо случай $m=n$.)

16. 1) Найти геометрическое место точек, расстояния которых от сторон данного угла имеют одно и то же отношение $m:n$.

2) Найти в треугольнике такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенные из неё на стороны, находились в данном отношении $m:n:p$.

Свойство биссектрисы в треугольнике.

17. BD — биссектриса угла B в треугольнике ABC . Требуется определить:

1) отрезки AD и DC , если $AB=10$ м, $BC=15$ м и $AC=20$ м;

2) сторону BC , если $AD:DC=8:5$ и $AB=16$ м;

3) сторону AC , если $AB:BC=2:7$ и $DC-AD=1$ м.

18. Угол треугольника, заключённый между сторонами в 9 см и 6 см, разделён пополам. Один из отрезков третьей стороны оказался равным одной из данных сторон. Определить третью сторону.

19. D — точка на стороне BC в треугольнике ABC . Узнать, делит ли прямая AD угол A пополам:

1) если $AB=12$ см, $AC=15$ см, $BD=8$ см и $DC=10$ см;

2) если $AB=12$ м, $AC=56$ м и $BD:DC=14:3$;

3) если $AB=\frac{5}{11}AC$, $BD=2$ м, $DC=4,5$ м;

4) если $AB=6$ м, $AC=28$ м и $BD=\frac{3}{17}BC$.

20. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что вершины D , E и F лежат соответственно на сторонах AB , BC и AC . Определить отрезки BE и EC , если $AB=14$ см, $BC=12$ см и $AC=10$ см.

21. Стороны треугольника равны 51 см, 85 см и 104 см. Проведена окружность, которая касается обеих меньших сторон, а центр имеет на большей стороне. На какие части большая сторона делится центром?

22. В равнобедренном треугольнике высота равна 20 см, а основание относится к боковой стороне, как 4:3. Определить радиус вписанного круга.

23. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60 см. Определить основание.

24. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56 см. Определить его стороны.

25. Хорда $AB=15$ м, хорда $AC=21$ м и хорда $BC=24$ м. Точка D — середина дуги CB . На какие части BE и EC делится хорда BC прямой AED ?

26. В треугольнике ABC даны стороны a , b и c . BD — биссектриса угла B , O — точка пересечения BD и биссектрисы угла C . Требуется определить отношение $OD:OB$.

27. В треугольнике ABC сторона $AB=15$ см и $AC=10$ см; AD — биссектриса угла A ; из точки D проведена прямая, параллельная AB , до пересечения с AC в точке E . Определить AE , EC и DE .

28. В равнобедренном треугольнике ABC сторона $AC=b$, сторона $BA=BC=a$; AN и CM — биссектрисы углов A и C . Определить длину MN .

§9. Подобие треугольников и многоугольников.

Подобные треугольники.

1. Стороны треугольника относятся, как 4:5:6; меньшая сторона подобного ему треугольника равна 0,8 м. Определить другие стороны второго треугольника.

2. Стороны треугольника относятся, как 2:5:4; периметр подобного ему треугольника равен 55 м. Определить стороны второго треугольника.

3. Длина тени, отбрасываемой фабричной трубой, равняется 35,8 м; в то же время вертикально воткнутый в землю кол длиной в 1,9 м дает тень длиной в 1,62 м. Найти высоту трубы.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано. $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Решить для этих треугольников следующие задачи:

1) дано: $a=10$; $b=14$; $a_1=25$; $c_1=20$. Определить c и b_1 ;

2) дано: $a=35$, $a_1=21$; $c=c_1=8$. Определить c .

5. В треугольниках ABC и DEF $\angle A = \angle E$ и $\angle B = \angle D$. Сторона $AB=16$ см; $BC=20$ см; $DE=12$ см; $AC=EF=6$ см. Определить AC , EF и DF .

6. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершине равны. Боковая сторона и основание одного треуголь-

ника равны 17 см и 10 см; основание другого равно 8 см. Определить его боковую сторону

7. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: $\angle B = \angle B_1$ и стороны первого треугольника, заключающие угол B , в 2,5 раза более сторон второго треугольника, заключающих угол B_1 . Определить AC и A_1C_1 , если их сумма равна 4,2 м

8. В треугольниках ABC и DEF имеется: $\angle B = \angle D$, $AB = \frac{4}{3}DE$ и $DF = 0,75 BC$. Определить AC и EF , если их разность равна 5 см.

9. Узнать, подобны ли треугольники, если стороны их таковы:

- 1) 1 м, 1,5 м и 2 м; 10 см, 15 см и 20 см;
- 2) 1 м, 2 м и 15 дм; 12 дм, 8 дм и 16 дм;
- 3) 1 м, 2 м и 1,25 м; 10 см, 9 см и 16 см.

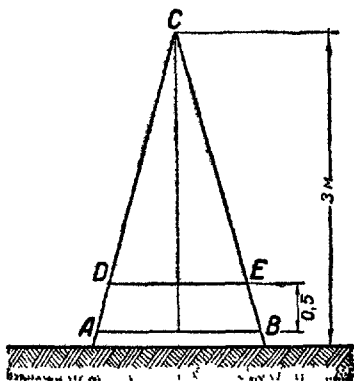
10. 1) В $\triangle ABC$ сторона $AB = 15$ м и $AC = 20$ м; на стороне AB отложен отрезок $AD = 10$ м, а на стороне AC отрезок $AE = 12$ м. Подобны ли треугольники ABC и ADE ?

2) В предыдущей задаче, сохранив длину сторон AB и AC , взять $AD = 9$ м и $AE = 12$ м. Будут ли тогда подобны треугольники ABC и ADE ?

11. AB — диаметр одной окружности; AC — хорда. Описана другая окружность на диаметре DE , равном $\frac{13}{17}AB$, и в ней проведена хорда DF , равная $\frac{13}{17}AC$. Определить EF , если известно, что $BC = 3,4$ м.

12. 1) Стороны одного треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м; периметр подобного ему треугольника равен 5,5 м. Определить стороны второго треугольника.

2) Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему тре-



Черт. 29.

угольника. Разность двух сходственных сторон равна 1 м. Определить эти стороны.

13. При устройстве мостов на козловых устоях (черт. 29) для лучшего распределения давления веса моста на грунт к подошвам ног козел A и B прибивают доску AB , а ноги каждой пары связывают схваткой DE . Найти длину схватки DE , если известно, что высота козел $h = 3$ м, длина доски $AB = 1,5$ м, а также, что схватка укрепляется на расстоянии 0,5 м от доски AB .

14. Дан треугольник ABC и внутри него отрезок DE , параллельный AC (D на AB , E на BC). Определить длину DE :

1) если $AC = 20$ см, $AB = 17$ см и $BD = 11,9$ см;

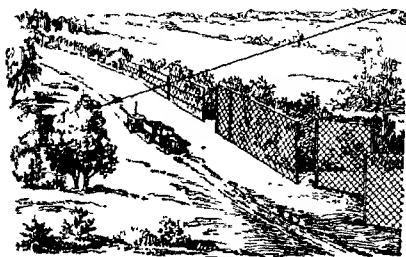
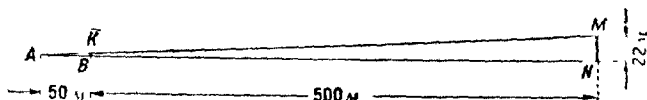
2) если $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм и $AD = 1$ м.

15. Дан треугольник ABC и внутри него отрезок DE , параллельный AC (D на AB и E на BC). Требуется:

1) определить AD , если $AB = 16$ см, $AC = 2$ дм и $DE = 15$ см;

2) определить отношение $AD:BD$, если известно, что $AC:DE = \frac{5}{7} : \frac{4}{11}$.

16. Открытый участок дороги находится в полосе AB шириной в 50 м (черт. 30); неприятельский наблюдательный



Черт. 30.

пункт находится на верху колокольни высотой $MN = 22$ м. Какой высоты следует сделать вертикальную маску KB на расстоянии 500 м от колокольни, чтобы закрыть дорогу от наблюдателя противника?

17. В треугольнике ABC , стороны которого a , b и c даны, проведена параллельно AC прямая MN так, что $AM = BN$. Определить MN .

18. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle BDC = \angle ABC$; на стороне AC получаются отрезки $AD = 7$ см и $DC = 9$ см. Определить сторону BC и отношение $BD:BA$.

19. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle ABD = \angle BCA$. Определить отрезки AD и DC , если $AB = 2$ м и $AC = 4$ м.

20. Построить треугольник, подобный данному, периметр которого равняется данной длине.

21. Построить треугольник по углу, одной из сторон, прилежащих к нему, и отношению этой стороны к третьей стороне.

22. Построить треугольник по высоте, углу при вершине и отношению отрезков основания.

Пропорциональные отрезки в трапеции и параллелограмме.

23. $ABCD$ — данная трапеция, причем $BC \parallel AD$; O — точка пересечения диагоналей; $AO = 8$ см, $OC = 1$ дм и $BD = 27$ см. Определить OB и OD .

24. Дана трапеция $ABCD$, причём стороны BC и AD параллельны; O — точка пересечения диагоналей; $BO:OD = 0,3:\frac{2}{3}$; средняя линия трапеции равна 29 см. Определить основания и отношение $AO:OC$.

25. В трапеции $ABCD$ (где $BC \parallel AD$) с диагональю BD углы ABD и BCD равны. Дано: $BC = 10$ см, $DC = 15$ см и $BD = 20$ см. Определить AB и AD .

26. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Определить диагональ AC , если основания BC и AD соответственно равны 12 см и 27 см.

27. Основания трапеции относятся, как 5:9, а одна из боковых сторон равна 16 см. На сколько надо её продолжить, чтобы она встретилась с продолжением другой боковой стороны?

28. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 420$ м. На стороне BC взята точка E так, что $BE:EC = 5:7$, и проведена прямая DE , пересекающая продолжение AB в точке F . Требуется определить BF .

29. $ABCD$ — данный параллелограмм; F — точка на продолжении стороны AB ; E — точка пересечения DF и AC . Определить BF , если $AE:EC = m:n$ и $AB = a$.

30. $ABCD$ — данный параллелограмм. Через точку пересечения его диагоналей проведена перпендикулярная к BC

прямая, которая пересекает BC в точке E , а продолжение AB — в точке F . Определить BE , если $AB=a$, $BC=b$ и $BF=c$.

Разные задачи.

31. В треугольник вписан параллелограмм, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 20 см и 25 см , а параллельные им стороны параллелограмма относятся, как $6:5$. Определить стороны параллелограмма.

32. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC . Определить сторону ромба, если $AB=c$ и $AC=b$.

33. Прямая, проведённая через вершину ромба вне его, отсекает на продолжениях двух сторон отрезки p и q . Определить сторону ромба.

34. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а концы противоположной стороны — на дуге.

35. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна его сторона лежала на стороне треугольника, а вершины противоположащих углов — на двух других сторонах треугольника.

36. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Вычислить сторону квадрата.

37. В данный треугольник вписать прямоугольник, у которого стороны относились бы, как $m:n$.

38. В треугольник, основание которого равно 48 см , а высота 16 см , вписан прямоугольник с отношением сторон $5:9$, причём большая сторона лежит на основании треугольника. Определить стороны прямоугольника.

39. В треугольник, у которого основание равно 30 см , а высота 10 см , вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Определить гипотенузу.

40. В треугольник вписан полукруг, у которого окружность касается основания, а диаметр (с концами на боковых сторонах треугольника) параллелен основанию. Определить радиус, если основание треугольника равно a , а высота h .

41. В треугольнике ABC угол C —прямой; $AC=6$ см, $BC=12$ см. На стороне BC взята точка D так, что $\angle ADC = 90^\circ - \angle B$. На какие части точка D делит сторону BC ?

42. В треугольнике ABC даны две стороны: $BC=16$ м, $AC=12$ м и сумма соответствующих высот $AD+BE=14$ м. Определить AD и BE .

43. Стороны параллелограмма равны 2 м и 16 дм; расстояние между большими сторонами равно 8 дм. Определить расстояние между меньшими сторонами.

44. Периметр параллелограмма равен 48 см, а его высоты относятся, как 5:7. Определить соответствующие им стороны.

45. Определить длину хорды, если дан радиус r и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.

46. Две окружности внешне касаются. Прямая, проведённая через точку касания, образует в окружностях хорды, из которых одна равна $\frac{13}{5}$ другой. Определить радиусы, если расстояние между центрами равно 36 см.

47. ABC — данный треугольник; CD —биссектриса угла C ; точка E лежит на BC , причём $DE \parallel AC$. Определить DE , если $BC=a$ и $AC=b$.

48. ABC — данный треугольник; BD — высота; AE — биссектриса угла A ; EF — перпендикуляр на AC . Определить EF , если $BD=30$ см и $AB:AC=7:8$.

49. В параллелограмм вписан ромб так, что его стороны параллельны диагоналям параллелограмма. Определить сторону ромба, если диагонали параллелограмма равны l и m .

50. Четыре параллели, между которыми последовательные расстояния относятся, считая сверху, как 2:3:4, пересечены двумя сходящимися над ними прямыми. Из полученных четырёх параллельных отрезков крайние равны 60 дм и 96 дм. Определить средние отрезки.

51. В треугольнике ABC проведён от BA к BC отрезок DE , параллельный AC . Дано: $AB=24$ м, $BC=32$ м, $AC=28$ м и $AD+CE=16$ м. Требуется определить DE .

52. AD и BE — высоты треугольника ABC , пересекающиеся в точке O . Дано: $AD+BE=35$ дм, $AO=9$ дм и $BO=12$ дм. Требуется определить OE и OD .

53. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100 дм, а основание 60 дм, вписан круг.

Определить расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

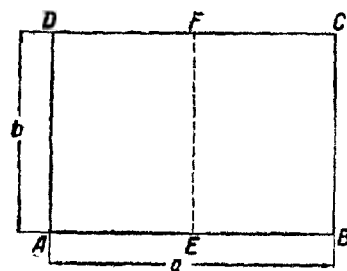
54. Радиус сектора равен r , а хорда его дуги равна a . Определить радиус круга, вписанного в этот сектор.

Подобные многоугольники.

55. Стороны одного пятиугольника равны 35 см, 14 см, 28 см, 21 см и 42 см; меньшая сторона подобного ему пятиугольника равна 12 см. Определить остальные стороны его.

56. Стороны одного четырёхугольника относятся между собой, как $1 : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 2$; периметр подобного ему четырёхугольника равен 75 м. Определить стороны второго четырёхугольника.

57. Стороны одного четырёхугольника равны 10 дм, 15 дм, 20 дм и 25 дм; в подобном ему четырёхугольнике сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 28 дм. Определить стороны второго четырёхугольника.



Черт. 31.

58. Наибольшие стороны двух подобных многоугольников равны 35 м и 14 м, а разность их периметров равна 60 м. Определить периметры.

59. Завод, изготавливающий цементные плиты для пола, установил у себя нормальную форму (стандарт) для прямоугольных плит такую, чтобы половина $BCFE$ плиты была подобна целой плите $ABCD$. Найти отношение сторон таких плит (черт. 31).

60. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = a$ и $BC = b$. Прямая EF отсекает параллелограмм $ABEF$, подобный $ABCD$. Определить отрезок BE .

§ 10. Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырёхугольников.

В прямоугольном треугольнике обозначают: a и b — катеты; c — гипотенуза; a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу; h — высота из вершины прямого угла. Предполагается, что отрезки измерены одной и той же единицей.

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.

1. Вычислить гипотенузу, если даны оба катета: 1) 12 см и 35 см; 2) 56 см и 33 см; 3) 4 м и 9 дм; 4) 60 см и 91 см; 5) 21 и $3\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{16}$; 7) 16,8 и 2,6; 8) 5 и 6.

2. Вычислить второй катет, если даны гипотенуза и первый катет¹⁾:

1) 289 и 240; 2) 269 и 69; 3) 145 и 143;

4) 42,5 и 6,5; 5) 17 и $15\frac{2}{3}$; 6) 10 и 7.

3. По двум данным элементам прямоугольного треугольника вычислить остальные четыре:

1) $a=15$, $b=20$; 2) $a=24$, $b=7$; 3) $a=4$, $b=5$;

4) $a=100$, $c=125$; 5) $b=65$, $c=169$; 6) $a=600$, $c=625$;

7) $a=6$, $a_c=3,6$; 8) $b=7$, $b_c=1,96$;

9) $c=29$, $a_c=15\frac{6}{29}$; 10) $c=3$, $b_c=2$;

11) $a_c=1\frac{1}{2}$, $b_c=2\frac{2}{3}$; 12) $a_c=2$, $b_c=18$;

13) $a=136$, $h=120$; 14) $b=9$, $h=8\frac{32}{41}$.

4. По данной сумме двух отрезков и среднему пропорциональному этим отрезкам построить отрезки.

5. По данной разности двух отрезков и среднему пропорциональному этим отрезкам построить отрезки.

6. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $ab=ch$.

7. Катеты относятся, как 5:6, а гипотенуза равна 122 см. Найти отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

8. Катеты относятся, как 3:2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 м больше другого. Определить гипотенузу.

9. Катеты относятся, как 3:7, а высота, проведенная на гипотенузу, равна 42 см. Определить отрезки гипотенузы.

10. Доказать, что диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, есть средняя пропорциональная между параллельными сторонами трапеции.

11. Доказать, что отношение квадратов катетов равно отношению их проекций на гипотенузу.

¹⁾ В задаче 2 и во многих других случаях выгодно при вычислении разность квадратов заменять произведением суммы на разность.

12. 1) Построить два отрезка, квадраты которых относятся, как $m:n$.

2) Построить два отрезка, которые относились бы, как квадраты двух данных отрезков.

**Теорема
Пифагора.**

13. Узнать, какими тремя последовательными целыми числами могут выражаться стороны прямоугольного треугольника.

14. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый жёлоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы жёлоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землёй. Определить длину жёлоба.

15. 1) Точка внутри прямого угла удалена от его сторон на расстояния a и b . Найти её расстояние от вершин.

2) Стороны прямоугольника равны 60 см и 91 см. Чему равна его диагональ?

16. Требуется выфрезовать квадратную головку со стороной 32 мм. Чему должен быть равен наименьший диаметр круглого железа, годного для этой цели?

17. 1) Сторона квадрата равна a . Чему равна его диагональ?

2) Определить сторону квадрата, если она меньше диагонали на 2 см

18. Диаметр бревна 12 см. Можно ли из этого бревна вытесать квадратный брус со стороной 10 см?

19. 1) Стороны прямоугольника равны a и b . Определить радиус описанного круга.

2) В круг вписан прямоугольник, стороны которого относятся, как 8:15. Определить эти стороны, если радиус круга равен 34 см.

20. 1) Катеты прямоугольного треугольника равны 8 дм и 18 см. Определить радиус описанного круга.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 16 см и 12 см. Определить медиану гипотенузы.

21. 1) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17 см, а основание 16 см. Определить высоту.

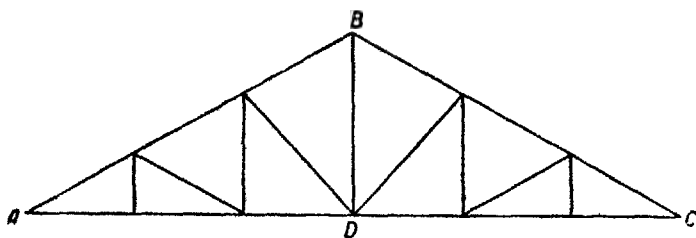
2) Определить стороны равнобедренного треугольника, если его высота равна 35 см, а основание относится к боковой стороне, как 48:25.

3) В равнобедренном треугольнике основание равно 4 см, а угол при нём равен 45° . Определить боковую сторону.

22. Стропильная ферма (черт. 32) имеет ноги AB и CB по 9 м и пролёт AC в 15 м. Определить высоту фермы BD .

23. 1) Биссектриса прямого угла делит гипотенузу прямоугольного треугольника на части, равные $2\frac{1}{7}$ м и $2\frac{6}{7}$ м. Определить катеты.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Из вершины прямого угла проведены высота и биссектриса. На какие отрезки разделилась гипотенуза?



Черт. 32.

24. 1) В равностороннем треугольнике определить высоту по данной стороне a .

2) В равностороннем треугольнике определить сторону по данной высоте h .

3) В равностороннем треугольнике высота меньше стороны на m . Определить сторону.

4) В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° , а больший катет равен 6 см. Определить две другие стороны этого треугольника.

25. 1) Боковые стороны треугольника равны: $a = 25$ см и $b = 30$ см, а высота $h_c = 24$ см. Определить основание c .

2) В треугольнике больший угол при основании равен 45° , а высота делит основание на части в 20 см и 21 см. Определить большую боковую сторону.

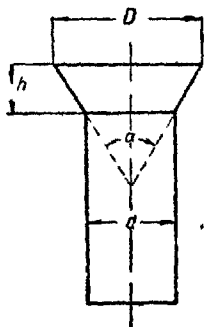
3) Из одной точки проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Определить длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 см и 50 см, а их проекции на данную прямую относятся, как 3:10.

26. 1) Диагонали ромба равны 24 см и 70 см. Определить сторону.

2) Определить диагонали ромба, если они относятся, как 3:4, а периметр равен 1 м.

27. 1) В равнобедренной трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Определить высоту трапеции.

2) В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 41 см, высота равна 4 дм и средняя линия 45 см. Определить основание.



Черт. 33.

28. Параллельно прямой дороге, на расстоянии 500 м от неё, расположена цепь стрелков; расстояние между крайними стрелками равно 120 м, дальность полёта пули равна 2,8 км. Какой участок дороги находится под обстрелом этой цепи?

29. На чертеже 33 изображена заклёпка ОСТ 302 (ОСТ — общесоюзный стандарт) с потайной головкой. Угол $\alpha = 60^\circ$. Вычислить:

- 1) D , если $d = 16,5$ мм и $h = 7,5$ мм;
- 2) d , если $D = 30$ мм и $h = 9,5$ мм;
- 3) h , если $D = 35$ мм и $d = 22$ мм.

Написать формулу, связывающую между собой D , d , h .

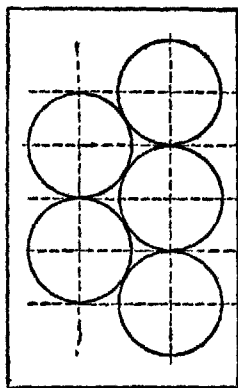
30. 1) В треугольнике ABC проведена высота AD . Доказать, что $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

2) Если M — некоторая точка высоты AD треугольника ABC , то $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$. Доказать.

31. 1) Доказать, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

2) В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна наклонной боковой стороне. Определить большую диагональ, если наклонная боковая сторона равна a , а меньшее основание равно b .

32. Из листа железа требуется выштамповать круглые шайбы диаметром в 28 мм. Найти расстояние между прямыми, на которых следует расположить центры шайб (черт. 34).



Черт. 34.

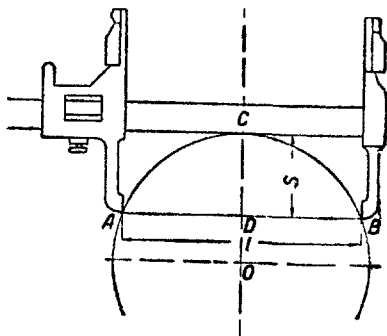
33. 1) Радиус круга равен 89 дм, хорда 16 м. Определить её расстояние от центра.

2) O — центр; ACB — хорда; OCD — радиус, перпендикулярный к ней, $OC = 9$ см и $CD = 32$ см. Определить хорду.

3) Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 см и 15 см, а общая хорда равна 24 см. Определить расстояние между центрами.

4) AB и CD — две параллельные хорды, расположенные по разные стороны от центра O окружности радиуса $R = 15$ см. Хорда $AB = 18$ см, хорда $CD = 24$ см. Определить расстояние между хордами.

5) Две параллельные хорды AB и CD расположены по одну сторону от центра O окружности радиуса $R = 30$ см. Хорда $AB = 48$ см, хорда $CD = 36$ см. Определить расстояние между хордами.



Черт. 35.

34. Чтобы измерить диаметр большого шкива, установили штангенциркуль так, как показано на чертеже 35. Длина ножек штангенциркуля $s = 25$ мм, расстояние между концами ножек $l = 200$ мм.

1) определить длину диаметра D ;

2) вывести формулу, выражающую зависимость D от s и l .

35. В сегменте хорда равна a , а высота h . Определить радиус круга.

36. Радиус круга равен 25 см; две параллельные хорды равны 14 см и 40 см. Определить расстояние между ними.

37. Расстояния от одного конца диаметра до концов параллельной ему хорды равны 13 см и 84 см. Определить радиус круга.

38. 1) К окружности радиуса, равного 36 см, проведена касательная из точки, удалённой от центра на 85 см. Определить длину касательной.

2) Из общей точки проведены к окружности две касательные. Радиус окружности равен 11 см, а сумма касательных.

тельных равна 120 см. Определить расстояние от центра до исходной точки касательных.

3) К окружности радиуса, равного 7 см, проведены две касательные из одной точки, удалённой от центра на 25 см. Определить расстояние между точками касания.

39. Два круга радиусов R и r внешне касаются. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Определить длину последней касательной.

40. 1) Два круга касаются извне. Определить длину их общей внешней касательной (между точками касания), если радиусы равны 16 см и 25 см.

2) Радиусы двух кругов равны 27 см и 13 см, а расстояние между центрами равно 50 см. Определить длину их общих касательных.

41. Касательная и секущая, проведённые из общей точки к одной окружности, взаимно перпендикулярны. Касательная равна 12 м, а внутренняя часть секущей равна 10 м. Определить радиус окружности.

42. AB и CD — параллельные прямые. AC — секущая, E и F — точки пересечения прямых AB и CD с биссектрисами углов C и A . Дано: $AF = 96$ см и $CE = 110$ см. Требуется определить AC .

43. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 32$ м, а боковая сторона 20 м. Из вершины B проведён перпендикуляр к боковой стороне до пересечения с основанием. На какие части он делит основание?

44. Катет $AC = 15$ см; катет $CB = 8$ см. Из центра C радиусом CB описана дуга, отсекающая от гипотенузы часть BD , которую и требуется определить.

45. Дуга, описанная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника радиусом, равным меньшему катету, делит гипотенузу на отрезки в 98 см и 527 см (начиная от меньшего катета). Определить катеты.

46. AB — диаметр круга; BC — касательная; D — точка пересечения прямой AC с окружностью. Дано: $AD = 32$ см и $DC = 18$ см. Требуется определить радиус.

47. AB — диаметр; BC и CDA — касательная и секущая. Определить отношение $CD:DA$, если BC равна радиусу.

**Биссектриса в
прямоугольном
треугольнике.**

48. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 7:9. В каком отношении (считая части в том же порядке) делит её высота?

49. Определить катеты, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части в 15 см и 20 см.

50. В равнобедренном прямоугольном треугольнике катет равен a . На какие части делит его биссектриса противолежащего угла?

51. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки m и n ($m > n$). Определить другой катет и гипотенузу.

52. В прямоугольном треугольнике, катеты которого равны 15 дм и 2 м, проведены: высота из вершины прямого угла и биссектрисы обоих углов, образуемых высотой с катетами. Определить отрезок гипотенузы, заключённый между биссектрисами.

53. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = 6$ см и гипотенуза $AB = 10$ см. Проведены биссектрисы угла ABC и угла с ним смежного, пересекающие катет AC и его продолжение в точках D и E . Определить длину DE .

54. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона $AB = 10$ м и основание $AC = 12$ м. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D . Требуется определить BD .

55. 1) В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а боковая сторона равна 39 см. Определить радиус вписанного круга.

2) В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 17:15. Основание равно 60 см. Найти радиус этого круга.

Высота и стороны в прямоугольном треугольнике, ромбе и трапеции.

56. Из точки B проведены к данной прямой перпендикуляр BC и наклонная BA . На AC взята точка D , и прямая BD продолжена до пересечения в точке E с прямой AE , перпендикулярной к AC . Определить AE , если $BA = 53$ дм, $AD = 8$ дм и $DC = 20$ дм.

57. 1) В равнобедренном треугольнике основание равно 30 дм, а высота 20 дм. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.

2) В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 3 дм, а высота, опущенная на боковую

сторону, равна 4 дм. Определить стороны этого треугольника.

3) Диагонали ромба равны 14 дм и 48 дм. Определить его высоту.

58. 1) Гипотенуза $AB = 34$ см; катет $BC = 16$ см. Определить длину перпендикуляра, восстановленного к гипотенузе из её середины до пересечения с катетом AC .

2) Радиус круга равен r . Определить длину хорды, проведённой из конца данного диаметра через середину перпендикулярного к нему радиуса.

59. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 16$ дм и катет $BC = 12$ дм. Из центра B радиусом BC описана окружность ω ; к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе (причём касательная и треугольник лежат по разные стороны гипотенузы). Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определить, на сколько продолжен катет.

60. Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156 дм, а расстояние между точками касания равно 120 дм. Определить радиус круга.

61. В прямоугольной трапеции основания равны 17 дм и 25 дм, а большая боковая сторона равна 10 дм. Из середины этой стороны проведён перпендикуляр к ней до встречи с продолжением другой боковой стороны. Определить длину этого перпендикуляра.

Смешанные
задачи на пря-
моугольный
треугольник.

62. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \parallel BC$. Определить отношение $AE:EC$, если $AC:CB = 4:5$.

63. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \perp AC$ и $DF \perp CB$. Определить DE и DF , если $AC = 75$ дм и $BC = 100$ дм.

64. В двух равнобедренных треугольниках боковые стороны имеют одинаковую длину, а сумма углов при вершинах равна 180° . Основания относятся, как 9:40, а длина боковой стороны равна 41 дм. Определить основания.

65. 1) В треугольнике основание равно 60 м, высота 12 м и медиана основания 13 м. Определить боковые стороны.

2) В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся, как 40:41.

66. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание и боковая сторона треугольника соответственно равны: 1) 6 дм и 5 дм; 2) 24 м и 13 м.

67. В прямоугольном треугольнике катеты равны 13 дм и 84 дм. Определить радиус вписанного круга.

68. Расстояние между центрами двух окружностей, лежащих одна вне другой, равно 65 дм; длина их общей внешней касательной (между точками касания) равна 63 дм, длина их общей внутренней касательной равна 25 дм. Определить радиусы окружностей.

69. Длины двух параллельных хорд равны 40 дм и 48 дм, расстояние между ними равно 22 дм. Определить радиус круга.

70. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, основания равны 36 см и 1 м. Определить радиус круга.

71. Около круга, радиус которого равен 12 см, описана равнобедренная трапеция с боковой стороной в 25 см. Определить основания этой трапеции.

72. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны относятся, как $m:n$. Определить стороны этой трапеции.

73. AB и AC — касательные к одному кругу с центром O , M — точка пересечения прямой AO с окружностью; DME — отрезок касательной, проведённой через M между AB и AC . Определить длину DE , если радиус круга равен 15 дм, а расстояние $AO = 39$ дм.

74. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 дм и 20 дм. Определить расстояние от центра вписанного круга до высоты, проведённой на гипотенузу.

75. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу, и на нём, как на диаметре, описана окружность, которая на катетах CA и CB даёт внутренние отрезки m и n . Определить катеты ($m = 12$; $n = 18$).

76. В прямоугольном треугольнике катеты равны 75 дм и 100 дм. На отрезках гипотенузы, образуемых высотой, построены полукруги по одну сторону с данным треугольником. Определить отрезки катетов, заключённые внутри этих полукругов.

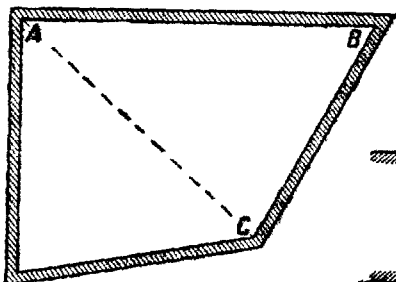
77. Если два круга имеют внешнее касание, то их общая внешняя касательная есть средняя пропорциональная между их диаметрами. Доказать.

78. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна к основаниям AD и BC ; сумма острых углов A и C равна 90° . Основание $AD = a$ и $BC = b$. Определить боковые стороны AB и CD .

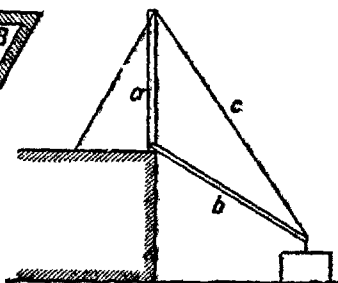
Косоугольный
треугольник.

79. На чертеже 36 показан план помещения, которое желают разгородить по линии AC . Ввиду препятствий, встречающихся вдоль прямой AC , вместо неё намечены: $AB = 50$ м, $BC = 35$ м и $\angle ABC = 60^\circ$. Вычислить по этим данным длину AC .

80. На чертеже 37 изображён кран, у которого стойка $a = 10$ м и плечо $b = 13$ м. Угол между a и b равен 120° . Определить длину тяги c .



Черт. 36.



Черт. 37.

81. В треугольнике определить вторую боковую сторону, если следующими числами соответственно выражаются первая боковая сторона, основание и проекция второй боковой на основание: 1) 6; 5; 3,8; 2) 2; 3; 2; 3) 12; 8; 11; 4) 2; 2; 3.

82. Определить вид треугольника (относительно углов), если даны три стороны или отношения их: 1) 2; 3; 4; 2) 3; 4; 5; 3) 4; 5; 6; 4) 10; 15; 18; 5) 68; 119; 170.

83. В треугольнике ABC пусть будут: b — основание, a и c — боковые стороны; p и q — их проекции на основание, h — высота. Определить p , q и h , если даны три стороны:

- 1) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$; 2) $a = 37$, $b = 30$, $c = 13$;
3) $a = 25$, $b = 12$, $c = 17$; 4) $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$.

84. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 60° и соответственно равны: 1) 5 см и 8 см; 2) 8 см и 15 см; 3) 63 см и 80 см.

85. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 120° и соответственно равны: 1) 3 см и 5 см; 2) 7 см и 8 см; 3) 11 см и 24 см.

86. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 45° и соответственно равны: 1) 2 и 3; 2) $\sqrt{8}$ и 5; 3) $\sqrt{18}$ и 7.

87. Определить стороны треугольника, зная, что средняя по величине сторона отличается от каждой из двух других на единицу и что проекция большей стороны на среднюю равна 9 единицам.

88. Сторона треугольника равна 21 см, а две другие стороны образуют угол в 60° и относятся, как 3:8. Определить эти стороны.

89. В треугольнике боковая сторона равна 16 м и образует с основанием угол в 60° ; другая боковая сторона равна 14 м. Определить основание.

90. Основание треугольника равно 13 см; угол при вершине равен 60° ; сумма боковых сторон равна 22 см. Определить боковые стороны и высоту.

91. В треугольнике основание равно 12 см; один из углов при нём равен 120° ; сторона против этого угла равна 28 см. Определить третью сторону.

92. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB продолжена на длину BD , равную BC , и точка D соединена с C . Определить стороны треугольника ADC , если катет $BC = a$.

93. Определить хорду половинной дуги, если хорда целой дуги равна a , радиус равен r ($r = 25$; $a = 48$).

94. 1) В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 15$ см и катет $BC = 20$ см. На гипотенузе AB отложена часть AD длиной в 4 см, и точка D соединена с C . Определить длину CD .

2) Треугольник ABC — прямоугольный при C . На продолжении гипотенузы AB отложен отрезок BD , равный катету BC , и точка D соединена с C . Определить длину CD , если $BC = 7$ см и $AC = 24$ см.

95. В треугольнике ABC проведены высоты BD и CE , и точки D и E соединены. Найти отношение площади $\triangle ADE$

к площади $\triangle ABC$: 1) если $\angle A = 45^\circ$; 2) если $\angle A = 30^\circ$.

96. В треугольнике ABC дана точка D на стороне AB ; определить длину CD , если известно, что $a = 37$, $b = 15$, $c = 44$ и $AD = 14$.

97. В тупоугольном треугольнике большая сторона равняется 16 см, а высоты, проведенные из обоих ее концов, отстоят от вершины тупого угла на 2 см и на 3 см. Определить две меньшие стороны треугольника.

98. Стороны равнобедренного треугольника суть: $AB = BC = 50$ см и $AC = 60$ см. Проведены высоты AE и CD , и точки D и E соединены. Определить стороны треугольника DBE .

99. В треугольнике ABC из конца C стороны AC проведен перпендикуляр к ней до пересечения в точке D с продолжением стороны AB . Определить BD и CD , если $AB = 45$, $BC = 39$ и $AC = 42$.

100. В треугольнике ABC даны стороны: $AB = 15$, $AC = 14$ и $BC = 13$. Биссектриса угла B продолжена за его вершину до пересечения в точке E с перпендикуляром к AC , проведенным из точки C . Определить длину CE .

101. Данного круга касаются два равных меньших круга: один изнутри, другой извне, причем дуга между точками касания содержит 60° . Радиусы меньших кругов равны r , радиус большего круга равен R . Определить расстояние между центрами меньших кругов

102. 1) Стороны параллелограмма равны 23 см и 11 см, а диагонали относятся, как 2:3. Определить диагонали.

2) Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а стороны относятся, как 2:3. Определить стороны.

103. 1) Диагонали параллелограмма равны 12 см и 14 см, а разность сторон равна 4 см. Определить стороны параллелограмма.

2) Определить стороны и диагонали параллелограмма, если большая сторона равна меньшей диагонали, разность сторон равна 3 см и разность диагоналей равна 2 см.

104. 1) Стороны треугольника: 16, 18 и 26. Вычислить медиану большей стороны.

Параллелограмм и трапеция.

2) Две стороны треугольника 7 и 11; медиана к третьей стороне равна 6. Определить третью сторону.

3) Стороны треугольника a , b и c . Определить медианы.

105. Определить высоту параллелограмма, у которого основание равно 51 см, а диагонали 40 см и 74 см.

106. В равнобедренной трапеции определить длину диагоналей: 1) если основания равны 4 м и 6 м, а боковая сторона равна 5 м; 2) если одна сторона равна 5 см, а другие три равны каждая 4 см.

107. Определить высоту и диагонали трапеции, если основания a и c и боковые стороны b и d выражаются следующими числами:

1) $a=25$, $b=13$, $c=11$, $d=15$;

2) $a=28$, $b=25$, $c=16$, $d=17$;

3) $a=6$, $b=3$, $c=1$, $d=4$.

108. В треугольник вписан параллелограмм так, что одна его сторона лежит на основании треугольника, а диагонали соответственно параллельны боковым сторонам треугольника. Основание треугольника равно 45 см, а боковые стороны 39 см и 48 см. Определить стороны параллелограмма.

109. Доказать, что в равнобедренной трапеции квадрат диагонали равен квадрату боковой стороны, сложенному с произведением оснований.

110. Доказать, что во всякой трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

111. Доказать, что во всяком четырёхугольнике сумма квадратов диагоналей вдвое более суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

112. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть средняя пропорциональная между диагоналями.

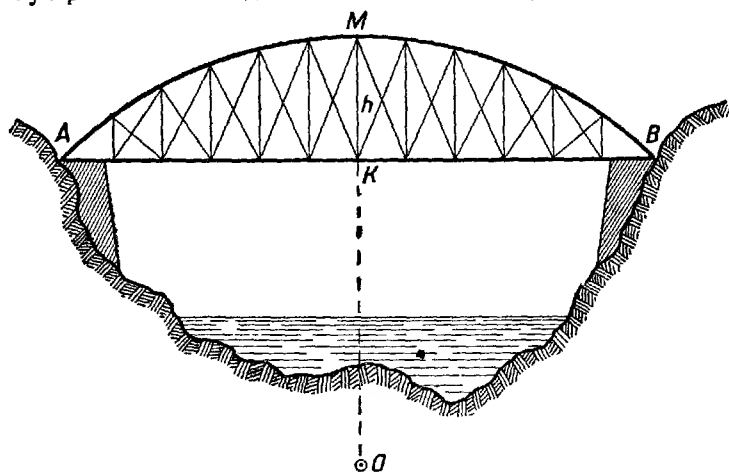
§ 11. Пропорциональные отрезки в круге.

1. Ферма моста ограничена дугой окружности (черт. 38); высота фермы $MK=h=3$ м; радиус дуги AMB пролёта $R=8,5$ м. Вычислить длину AB пролёта моста.

2. В сводчатом подвале, имеющем форму полуцилиндра, надо поставить две стойки, каждая на одинаковом расстоянии от ближайшей стены. Определить высоту стоек, если ширина подвала по низу равна 4 м, а расстояние между стойками 2 м.

3. 1) Из точки окружности проведён перпендикуляр на диаметр. Определить его длину при следующей длине отрезков диаметра: 1) 12 см и 3 см; 2) 16 см и 9 см; 3) 2 м и 5 дм.

2) Из точки диаметра проведён перпендикуляр до пересечения с окружностью. Определить длину этого перпендикуляра, если диаметр равен 40 см, а проведённый перпендикуляр отстоит от одного из концов диаметра на 8 см.



Черт. 38.

4. Диаметр разделён на отрезки: $AC = 8$ дм и $CB = 5$ м, и из точки C проведён к нему перпендикуляр CD данной длины. Указать положение точки D относительно круга, когда CD равняется: 1) 15 дм; 2) 2 м; 3) 23 дм.

5. ACB — полуокружность; CD — перпендикуляр на диаметр AB . Требуется:

- 1) определить DB , если $AD = 25$ и $CD = 10$;
- 2) определить AB , если $AD:DB = 4:9$ и $CD = 30$;
- 3) определить AD , если $CD = 3AD$, а радиус равен r ;
- 4) определить AD , если $AB = 50$ и $CD = 15$.

6. 1) Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на радиус, равный 34 см, делит его в отношении 8:9 (начиная от центра). Определить длину перпендикуляра.

2) Хорда BDC перпендикулярна к радиусу ODA . Определить BC , если $OA = 25$ см и $AD = 10$ см.

3) Ширина кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна 8 дм ; хорда большей окружности, касательная к меньшей, равна 4 м . Определить радиусы окружностей.

7. С помощью сравнения отрезков доказать, что среднее арифметическое двух неравных чисел больше их среднего геометрического.

8. Построить отрезок, средний пропорциональный между отрезками 3 см и 5 см .

9. Построить отрезок, равный: $\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{3}$.

10. ADB — диаметр; AC — хорда; CD — перпендикуляр к диаметру. Определить хорду AC : 1) если $AB = 2 \text{ м}$ и $AD = 0,5 \text{ м}$; 2) если $AD = 4 \text{ см}$ и $DB = 5 \text{ см}$; 3) если $AB = 20 \text{ м}$ и $DB = 15 \text{ м}$.

11. AB — диаметр; AC — хорда; AD — её проекция на диаметр AB . Требуется:

1) определить AD , если $AB = 18 \text{ см}$ и $AC = 12 \text{ см}$;

2) определить радиус, если $AC = 12 \text{ м}$ и $AD = 4 \text{ м}$;

3) определить DB , если $AC = 24 \text{ см}$ и $DB = \frac{7}{9} AD$.

12. AB — диаметр; AC — хорда; AD — её проекция на диаметр AB . Требуется:

1) определить AC , если $AB = 35 \text{ см}$ и $AC = 5AD$;

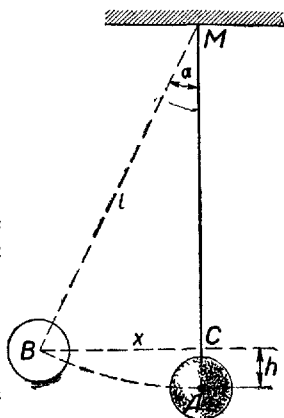
2) определить AC , если радиус равен r и $AC = DB$.

13. Две хорды пересекаются внутри круга. Отрезки одной хорды равны 24 см и 14 см ; один из отрезков другой хорды равен 28 см . Определить второй её отрезок.

14. Мостовая ферма ограничена дугой окружности (черт. 38); длина моста $AB = 6 \text{ м}$, высота $h = 1,2 \text{ м}$. Определить радиус дуги ($OM = R$).

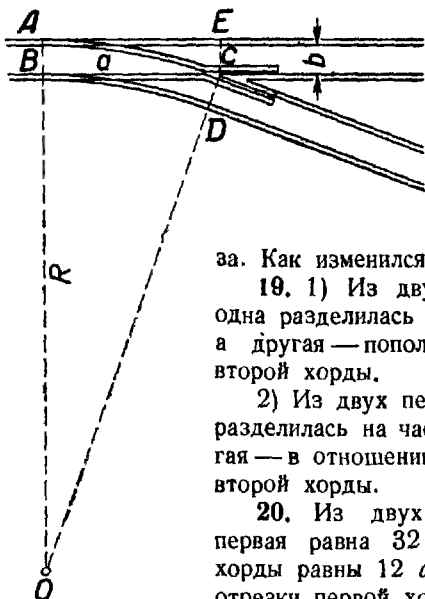
15. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке M так, что $MA = 7 \text{ см}$, $MB = 21 \text{ см}$, $MC = 3 \text{ см}$ и $MD = 16 \text{ см}$. Лежат ли точки A, B, C и D на одной окружности?

16. Длина маятника $MA = l = 1 \text{ м}$ (черт. 39), высота подъёма его, при отклонении на угол α , $CA = h = 10 \text{ см}$. Найти расстояние BC точки B от MA ($BC = x$).



Черт. 39.

17. Для перевода железнодорожного пути шириной $b = 1,524$ м в месте AB (черт. 40) сделано закругление;



Черт. 40.

при этом оказалось, что $BC = a = 42,4$ м. Определить радиус закругления $OA = R$.

18. Хорда AMB повернута около точки M так, что отрезок MA увеличился в $2\frac{1}{2}$ ра-

за. Как изменился отрезок MB ?

19. 1) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 48 см и 3 см, а другая — пополам. Определить длину второй хорды.

2) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 12 м и 18 м, а другая — в отношении 3:8. Определить длину второй хорды.

20. Из двух пересекающихся хорд первая равна 32 см, а отрезки другой хорды равны 12 см и 16 см. Определить отрезки первой хорды.

21. Секущая ABC повернута около внешней точки A так, что внешний её отрезок AB уменьшился в три раза. Как изменилась длина секущей?

22. Пусть ADB и AEC — две прямые, пересекающие окружность: первая — в точках D и B , вторая — в точках E и C . Требуется:

1) определить AE , если $AD = 5$ см, $DB = 15$ см и $AC = 25$ см;

2) определить BD , если $AB = 24$ м, $AC = 16$ м и $EC = 10$ м;

3) определить AB и AC , если $AB + AC = 50$ м, а $AD:AE = 3:7$.

23. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удалённой от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Определить длину этой секущей.

24. MAB и MCD — две секущие к одной окружности. Требуется:

1) определить CD , если $MB=1$ м, $MD=15$ дм и $CD=MA$;

2) определить MD , если $MA=18$ см, $AB=12$ см и $MC:CD=5:7$;

3) определить AB , если $AB=MC$, $MA=20$ и $CD=11$.

25. Две хорды продолжены до взаимного пересечения. Определить длину полученных продолжений, если хорды равны a и b , а их продолжения относятся, как $m:n$.

26. Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Определить длину касательной, если внешний и внутренний отрезки секущей соответственно выражаются следующими числами: 1) 4 и 5; 2) 2,25 и 1,75; 3) 1 и 2.

27. Касательная равна 20 см, а наибольшая секущая, проведённая из той же точки, равна 50 см. Определить радиус круга.

28. Секущая больше своего внешнего отрезка в $2\frac{1}{4}$ раза. Во сколько раз она больше касательной, проведённой из той же точки?

29. Общая хорда двух пересекающихся окружностей продолжена, и из точки, взятой на продолжении, проведены к ним касательные. Доказать, что они равны.

30. На одной стороне угла A отложены один за другим отрезки: $AB=6$ см и $BC=8$ см; а на другой стороне отложен отрезок $AD=10$ см. Через точки B , C и D проведена окружность. Узнать, касается ли этой окружности прямая AD , а если нет, то будет ли точка D первой (считая от A) или второй точкой пересечения.

31. Пусть будет: AB — касательная и ACD — секущая той же окружности. Требуется:

1) определить CD , если $AB=2$ см и $AD=4$ см;

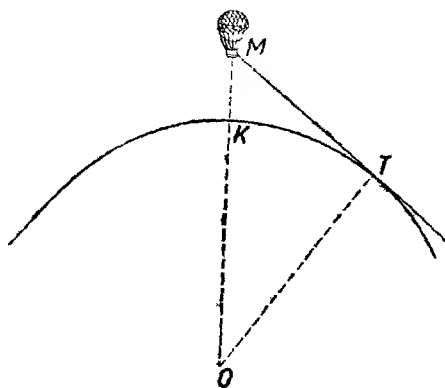
2) определить AD , если $AC:CD=4:5$ и $AB=12$ см;

3) определить AB , если $AB=CD$ и $AC=a$.

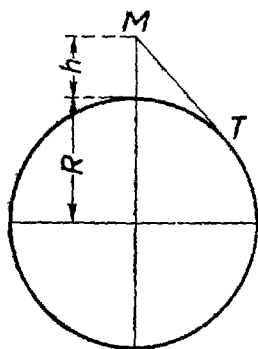
32. 1) Как далеко видно с воздушного шара (черт. 41), поднявшегося на высоту 4 км над землёй (радиус земли равен ≈ 6370 км)?

2) Гора Эльбрус (на Кавказе) поднимается над уровнем моря на 5600 м. Как далеко можно видеть с вершины этой горы?

3) M — наблюдательный пункт высотой h метров над землёй (черт. 42); радиус земли R , $MT=d$ есть наибольшее видимое расстояние. Доказать, что $d=\sqrt{2Rh+h^2}$.



Черт. 41.



Черт. 42.

Замечание. Так как h^2 вследствие своей малости сравнительно с $2Rh$ на результат почти не влияет, то можно пользоваться приближённой формулой $d \approx \sqrt{2Rh}$.

33. 1) Касательная и секущая, выходящие из одной точки, соответственно равны 20 см и 40 см; секущая удалена от центра на 8 см. Определить радиус круга.

2) Определить расстояние от центра до той точки, из которой выходят касательная и секущая, если они соответственно равны 4 см и 8 см, а секущая удалена от центра на 12 см.

34. 1) Из общей точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить длину касательной, если она на 5 см больше внешнего отрезка секущей и на столько же меньше внутреннего отрезка.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Секущая равна a , а её внутренний отрезок больше внешнего отрезка на длину касательной. Определить касательную.

35. Из общей точки проведены к одной окружности касательная и секущая. Касательная больше внутреннего и внешнего отрезков секущей соответственно на 2 см и 4 см. Определить длину секущей.

36. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить их длину, если касательная на 20 см меньше внутреннего отрезка секущей и на 8 см больше внешнего отрезка.

37. 1) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 30 см, а внутренний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Определить секущую и касательную.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 15 см, а внешний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Определить секущую и касательную.

38. Отрезок AB продолжен на расстояние BC . На AB и AC , как на диаметрах, построены окружности. К отрезку AC в точке B проведён перпендикуляр BD до пересечения с большей окружностью. Из точки C проведена касательная CK к меньшей окружности. Доказать, что $CD = CK$.

39. К данной окружности проведены две параллельные касательные и третья касательная, пересекающая их. Радиус есть средняя пропорциональная между отрезками третьей касательной. Доказать.

40. Даны две параллельные прямые на расстоянии 15 дм одна от другой; между ними дана точка M на расстоянии 3 дм от одной из них. Через точку M проведена окружность, касательная к обоим параллелям. Определить расстояние между проекциями центра и точки M на одну из данных параллелей.

41. В круг радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма высоты и основания равна диаметру круга. Определить высоту.

42. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника: 1) если основание равно 16 см, а высота 4 см; 2) если боковая сторона равна 12 дм, а высота 9 дм; 3) если боковая сторона равна 15 м, а основание 18 м.

43. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 дм, а боковая сторона равна 30 дм. Определить радиусы кругов, описанного и вписанного, и расстояние между их центрами.

{ 44. Радиус равен r , хорда данной дуги равна a . Определить хорду удвоенной дуги.

45. Радиус окружности равен 8 дм; хорда AB равна 12 дм. Через точку A проведена касательная, а из точки B — хорда BC , параллельная касательной. Определить расстояние между касательной и хордой BC .

46. Точка A удалена от прямой MN на расстояние a . Данным радиусом r описана окружность так, что она проходит через точку A и касается линии MN . Определить расстояние между полученной точкой касания и данной точкой A .

§ 12. Правильные многоугольники.

Обозначения: n — число сторон правильного многоугольника; a_n — сторона правильного вписанного многоугольника; b_n — сторона правильного описанного многоугольника; k_n — апофема правильного вписанного многоугольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.

1. 1) Вычислить центральный угол правильных 24-угольника и 16-угольника.

2) Какой правильный многоугольник имеет центральный угол, равный 30° ? 12° ?

2. Центральный угол правильного многоугольника и угол при вершине в сумме составляют 180° . Доказать.

3. Определить величину угла правильного n -угольника ($n=3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 25$).

4. 1) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен 135° ? 150° ?

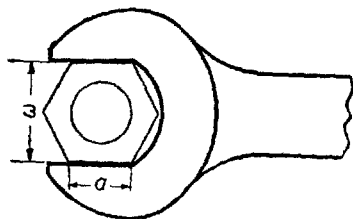
2) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен 36° ? 24° ?

5. Конец валика диаметром в 4 см опилен под квадрат. Определить наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.

6. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трёхгранную форму. Какой наибольший размер может иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр в 2 см?

7. Вычислить, какой размер отверстия \varnothing должен иметь ключ для правильной шестигранной гайки, если ширина грани гайки $a = 2,5$ см. Величина зазора между гранями гайки и ключа равна 0,5 мм (черт. 43).

8. 1) Вписать в окружность правильный 12-угольник, 15-угольник.



Черт. 43.

2) Описать около круга правильный 8-угольник, 10-угольник.

3) По данной стороне a построить правильный 8-угольник, 12-угольник.

9. 1) Хорда, перпендикулярная к радиусу в его середине, равна стороне правильного вписанного треугольника. Доказать.

2) Показать, что $k_8 = 0,5a_8$.

10. 1) В правильном треугольнике апофема равна $\frac{1}{3}$ высоты и $\frac{1}{2}$ радиуса описанного круга. Доказать.

2) Разность между радиусами окружностей, описанной около правильного треугольника и вписанной в него, равна m . Определить сторону треугольника.

11. 1) Сторона правильного многоугольника равна a ; радиус круга, описанного около этого многоугольника, равен R . Определить радиус вписанного круга.

2) Сторона правильного многоугольника равна a ; радиус вписанного в него круга равен r . Определить радиус описанного круга.

3) R — радиус описанного около многоугольника круга. r — радиус вписанного круга. Определить сторону этого многоугольника.

12. В окружность радиуса $R = 4$ см вписан правильный 6-угольник. Найти проекции его сторон на каждую диагональ.

13. Доказать, что: 1) $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; 2) $k_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

14. Доказать, что: 1) $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; 2) $k_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

15. По данному $a_n = a$ определить R , если n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 12.

16. По данному a определить: 1) k_3 ; 2) k_4 ; 3) k_6 .

17. По данному $k_n = k$ определить R , если n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

18. По данному R определить: 1) b_3 ; 2) b_4 ; 3) b_6 .

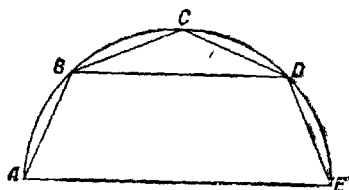
19. По данному радиусу круга R и данной стороне a_n правильного вписанного n -угольника определить сторону b_n правильного описанного n -угольника.

20. В круг радиуса $R = 50$ см вписать правильный 7-угольник, воспользовавшись тем, что сторона правильного

вписанного 7-угольника равна приблизительно половине стороны правильного вписанного треугольника.

21. Определить длину диагоналей правильного 8-угольника: 1) по данному радиусу R ; 2) по данной стороне a .

22. Определить длину диагоналей правильного 12-угольника: 1) по данному радиусу R ; 2) по данной стороне a .



Черт. 44.

23. Построить правильный пятиугольник по диагонали.

24. Самое простое мансардное покрытие образует в вертикальном сечении половину правильного 8-угольника (черт. 44).

Найти ширину перекрытия BD , сторону 8-угольника и высоту мансардной комматки $ABDE$. Дано: $AE = 6$ м.

25. В окружность вписан и около неё описан правильные n -угольники. Найти отношение сторон этих n -угольников ($n = 3$; $n = 6$).

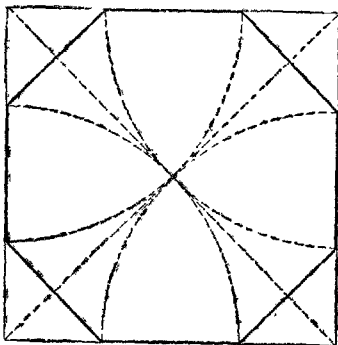
26. В окружность радиуса R вписан правильный n -угольник, и середины его сторон последовательно соединены. Определить сторону нового n -угольника, если n равно: 1) 6; 2) 8.

27. 1) В правильном 8-угольнике со стороной a соединены середины четырёх сторон, взятых через одну так, что получился квадрат. Определить сторону квадрата.

2) В правильном 12-угольнике со стороной a соединены середины шести сторон, взятых через одну так, что получился правильный 6-угольник. Определить его сторону.

28. Построить правильный 8-угольник отсечением углов данного квадрата.

Чтобы превратить данный квадрат отсечением его углов в правильный 8-угольник, отсекаем стороны (черт. 45) квадрата дугами, имеющими радиусами



Черт. 45.

половину диагонали квадрата, а центрами — вершины квадрата. Доказать, что полученный 8-угольник будет правильным.

29. Путём срезывания углов превратить данный правильный треугольник со стороной a в правильный 6-угольник и определить его сторону.

30. В окружность радиуса R вписан правильный многоугольник со стороной a_n . Удвоить число сторон этого много-

угольника и доказать, что $a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$.

31. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна b . Найти радиус круга и сторону вписанного в окружность квадрата.

32. В окружность, радиус которой равен 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Определить радиус окружности, описанной около квадрата.

33. 1) В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в который вписан круг, а в этот круг вписан квадрат. Определить сторону этого квадрата.

2) Около правильного треугольника со стороной a описана окружность; около этой окружности описан квадрат, а около него — окружность. Определить радиус окружности, описанной около квадрата.

34. 1) Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей.

2) Центры двух пересекающихся окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды, имеющей длину a и стягивающей в одной окружности дугу в 60° , а в другой — дугу в 30° . Определить расстояние между центрами.

35. ABC — вписанный правильный треугольник; AD — треть стороны AB ; BE — треть стороны BC . Доказать, что отрезок DE равен радиусу.

36. Каждая сторона правильного треугольника, равная a , разделена на три равные части, и соответственные точки деления (считая в одном направлении) соединены между собой, отчего получился новый треугольник. Определить радиус вписанного в него круга.

37. Вписать в данный квадрат другой с данной стороной. Всегда ли разрешима задача?

38. В ромб вписать квадрат, стороны которого параллельны диагоналям ромба.

39. Один из двух квадратов со стороной a , наложенных друг на друга, повернут около центра на 45° . Определить периметр образовавшейся при этом звезды.

40. 1) Диагонали правильного пятиугольника в свою очередь образуют правильный пятиугольник. Доказать.

2) Если стороны правильного пятиугольника продолжить до взаимного пересечения, то получается звёздчатый пятиугольник с равными сторонами (пентаграмма). Доказать.

41. 1) Окружность радиуса R разделена на шесть равных частей, и точки деления соединены хордами через одну. Определить сторону полученной шестиугольной звезды.

2) Окружность радиуса R разделена на восемь равных частей, и точки деления соединены хордами через одну. Определить сторону восьмиугольной звезды.

42. По данному радиусу R определить хорду дуги, которая содержит: 1) 135° ; 2) 150° .

43. Определить отношение между сторонами треугольника, если его углы относятся, как $1:2:3$.

44. Середина полуокружности соединена с концами диаметра, и через середины соединяющих отрезков проведена хорда. Каждый из боковых отрезков хорды равен c . Определить радиус круга.

45. В сегмент с дугой в 120° и высотой h вписан прямоугольник, у которого основание в 4 раза больше высоты. Определить высоту прямоугольника.

46. n равных кругов, касающихся между собой, касаются данного круга, радиус которого равен R . Определить радиус этих кругов, если число их n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

47. На каждой из двух половин данного отрезка построены, как на диаметрах, два круга, и из каждого конца этого отрезка проведены касательные к кругу, построенному у другого конца. Доказать, что отрезок, соединяющий точки пересечения касательных, равен стороне квадрата, вписанного в один из построенных кругов.

§ 13. Площади прямолинейных фигур.

Квадрат.

1. Вычислить площадь сечения дорожной трубы, изображённой на чертеже 46 (размеры даны в метрах).

2. Железная проволока с сечением в 1 мм^2 разрывается от груза в 40 кг . Какой нагрузкой разорвётся железный стержень, поперечное сечение которого — квадрат со стороной в 24 мм ?

3. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м . Определить сторону квадратного участка земли, равновеликого обоим.

4. 1) Определить площадь квадрата по его диагонали l .

2) Определить площадь квадрата, вписанного в круг радиуса R .

3) Во сколько раз площадь описанного квадрата больше площади вписанного (в тот же круг)?

5. 1) Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза? уменьшить в 1,5 раза?

2) Как надо изменить каждую сторону квадрата, чтобы площадь его увеличилась в 4 раза? уменьшилась в 25 раз?

6. Площадь плана квадратного участка земли (масштаб $1:10\,000$) равна $552,25 \text{ см}^2$. Найти площадь участка в натуре.

7. Танк лёгкого типа весит $6\,880 \text{ кг}$, ширина его гусениц $0,35 \text{ м}$, длина части гусениц, соприкасающихся с грунтом, $2,05 \text{ м}$ (с каждой стороны). Какой вес приходится на 1 дм^2 рабочей площади гусениц?

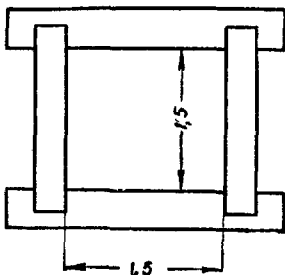
Прямоугольник.

8. Заводское здание прямоугольной формы имеет длину в $82,5 \text{ м}$ и ширину в $26,5 \text{ м}$. Определить в арах площадь застроенного участка земли.

9. Прямоугольный участок земли содержит 400 га ; длина участка 8 км ; найти длину границы участка (периметр).

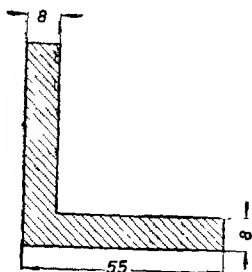
10. 1) Определить стороны прямоугольника, если они относятся, как $4:9$, а площадь равна 144 м^2 .

2) Определить стороны прямоугольника, если его периметр равен 74 дм , а площадь 3 м^2 .

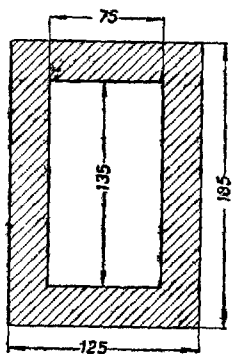


Черт. 46

11. Стороны прямоугольника равны 72 м и 8 м. Определить сторону равновеликого ему квадрата.



Черт. 47.



Черт. 48.

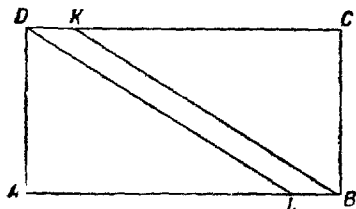
12. Вычислить площадь поперечного сечения равнобокого углового железа (черт. 47, размеры даны в миллиметрах).

13. Вычислить площадь поперечного сечения трубы на чертеже 48 (размеры даны в миллиметрах).

14. Диагональ прямоугольника равна 305 см, а площадь равна 37 128 см². Определить периметр этого прямоугольника.

15. Через поле, имеющее форму прямоугольника $ABCD$ (черт. 49), должна пройти железная дорога. Известно, что $AB = 125$ м, $BC = 72,5$ м, $AL = KC = 114,6$ м. Вычислить площадь отчуждаемой полосы $BLDK$.

Параллелограмм.



Черт. 49.

16. Площадь параллелограмма содержит 480 см²; его периметр равен 112 см; расстояние между большими сторонами равно 12 см. Определить расстояние между меньшими сторонами.

17. Определить площадь параллелограмма по двум высотам его h_1 и h_2 и периметру $2p$.

18. Определить площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними: 1) a , b , 30° ; 2) a , b , 45° ; 3) a , b , 60° .

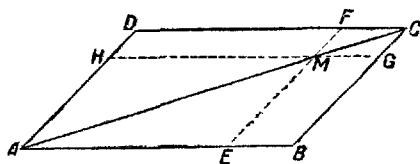
19. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найти острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.

20. Начертить квадрат и ромб, периметры которых одинаковы. Площадь которой из этих фигур больше? почему?

21. Определить площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

22. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 37$ см, а перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей на сторону AD , делит её на отрезки: $AE = 26$ см и $ED = 14$ см. Определить площадь параллелограмма.

23. 1) В параллелограмме $ABCD$ (черт. 50) проведена диагональ AC , и на ней взята произвольная точка M . Через M проведены прямые, параллельные



Черт. 50.

сторонам параллелограмма: $EF \parallel BC$ и $GH \parallel CD$. Доказать, что образовавшиеся при этом параллелограммы $DHMF$ и $EBGM$, через которые диагональ не проходит, равновелики.

2) Параллелограмм имеет стороны $a = 8$ см и $b = 4$ см. Превратить его в равновеликий ему параллелограмм с таким же углом и с основанием $b = 6$ см.

24. В данном квадрате каждая вершина соединена с серединой стороны, лежащей между двумя следующими вершинами (считая вершины в одинаковом порядке). Соединительные прямые образуют своим пересечением внутренний квадрат. Доказать (вычислением), что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного квадрата.

25. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны m и n . Определить площадь этого квадрата.

26. Из каждой вершины данного квадрата проведена в следующую вершину внутренняя дуга в 120° , и точки пересечения дуг соединены между собой, отчего получился внутренний квадрат. Найти отношение площадей квадратов.

27. Из точки, взятой на гипотенузе, проведены перпендикуляры на оба катета. Определить площадь прямоугольника, образованного этими перпендикулярами, если отрезки катетов при гипотенузе равны m и n .

28. В треугольник, у которого основание равно 30 см, а высота 10 см, вписан прямоугольник с площадью в 63 см². Определить стороны этого прямоугольника.

Треугольник.

29. Воздух давит с силой 1,03 кг на каждый квадратный сантиметр. Найти давление воздуха на треугольную площадку, основание которой равно 0,13 м, высота 0,18 м.

30. Определить площадь треугольника, если его основание и высота соответственно равны: 1) 32 см и 18 см; 2) 5 дм и 4 м; 3) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{20}$.

31. 1) Построить треугольник, равновеликий треугольнику ABC , сохраняя сторону BC , но заменяя угол ABC данным углом α .

2) Построить равнобедренный треугольник с основанием BC , равновеликий данному треугольнику ABC .

32. 1) Разделить данный треугольник на три равновеликих треугольника прямыми, выходящими из одной вершины.

2) Данный параллелограмм разделить на четыре равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

3) Данный параллелограмм разделить на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

33. Определить площадь треугольника по сторонам a и b и углу между ними: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

34. Если две стороны треугольника равны 3 см и 8 см, то может ли его площадь быть равна: 1) 10 см²; 2) 15 см²; 3) 12 см²?

35. 1) Определить площадь прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 313 см, а один из катетов 312 см.

2) Площадь прямоугольного треугольника равна 720 см², а катеты относятся, как 9:40. Определить гипотенузу.

3) По данным катетам a и b определить высоту, проведенную на гипотенузу.

36. Определить площадь равнобедренного прямоугольного треугольника по его гипотенузе c .

37. Определить площадь равнобедренного треугольника, если его основание и боковая сторона соответственно равны: 1) 56 см и 1 м; 2) b и c ; 3) 20 см и 11 см.

38. Через точку K , данную на стороне AB треугольника ABC , провести прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника пополам.

39. 1) Определить площадь равностороннего треугольника по его стороне a .

2) Определить сторону равностороннего треугольника по его площади Q .

3) Определить площадь равностороннего треугольника по его высоте h .

40. 1) Определить площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

2) Определить площадь правильного описанного треугольника, если радиус круга равен r .

41. Определить площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки в 32 см и 18 см .

42. Определить площадь треугольника, если его высота равна 36 см , а боковые стороны 85 см и 60 см .

43. Определить катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см , а площадь равна 1320 см^2 .

44. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см , а площадь равна 48 см^2 . Определить основание.

45. 1) Определить площадь ромба, диагонали которого равны 72 см и 40 см .

2) Определить высоту ромба, если его диагонали равны 16 м и 12 м .

46. Определить сторону ромба, если его диагонали относятся, как $m:n$, а площадь равна Q .

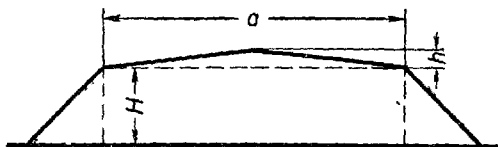
47. Из середины основания треугольника проведены прямые, параллельные сторонам. Доказать, что площадь полученного таким образом параллелограмма равна половине площади треугольника.

48. Если какую-нибудь точку внутри параллелограмма соединить со всеми его вершинами, то сумма площадей двух противолежащих треугольников равна сумме площадей двух других. Доказать это.

49. Превратить треугольник в равновеликий ему параллелограмм.

50. Превратить данный многоугольник в равновеликий ему многоугольник, число сторон которого на одну меньше, чем у данного многоугольника.

51. Ширина полотна дороги $a = 6,74$ м (черт. 51), зела (h) подъема полотна над насыпью должна соста-



Черт. 51.

лять 2% ширины полотна, высота насыпи $H = 1,5$ м и откосы наклонены к линии горизонта под углом в 45° . Вычислить площадь поперечного профиля дороги.

52. Определить площадь треугольника, если основание равно a , а углы при основании 30° и 45° .

53. Равные прямоугольные треугольники ACB и $A'DB$ находятся по одну сторону общей гипотенузы AB ; при этом $AD = BC = 12$ см и $AC = BD = 16$ см. Определить площадь общей части данных треугольников.

54. На сторонах равностороннего треугольника построены квадраты, и свободные вершины их соединены. Определить площадь полученного шестигульника, если сторона данного треугольника равна a .

55. Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

56. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно $1,05$; разность между радиусами описанного и вписанного кругов 17 дм. Определить площадь треугольника.

57. В ромбе, диагонали которого равны 150 см и 200 см, проведены из вершины тупого угла высоты и концы их соединены. Определить площадь получившегося таким образом треугольника.

58. AB и CD — два параллельных отрезка; M — точка пересечения линий AD и BC (соединяющих концы отрезков накрест). Отрезок $AB = 8$ см, отрезок $CD = 12$ см, расстояние между ними равно 10 см. Определить сумму площадей треугольников ABM и MCD .

Формула
Герона.

59. Определить площадь треугольника по трем данным сторонам:

- 1) 13; 14; 15. 2) 29; 25; 6. 3) 5; 6; 9.
4) 3; 5; 7. 5) 6; 5; 2,2. 6) 5; $8\frac{2}{3}$; $12\frac{1}{3}$.

7) 5; 4; $\sqrt{17}$. 8) 5; $\sqrt{58}$; $\sqrt{65}$. 9) $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$.

60. 1) Определить меньшую высоту треугольника, стороны которого равны: 25 дм; 29 дм; 36 дм

2) Определить большую высоту треугольника со сторонами: 15; 112; 113.

61. Определить стороны треугольника: 1) если они относятся, как 26:25:3, а площадь треугольника равна 9 м^2 ; 2) если стороны относятся, как 9:10:17, а площадь равна 144 см^2 .

62. Определить площадь четырехугольника по диагонали, равной 17 см, и сторонам: 10 см и 21 см, лежащим по одну сторону диагонали, 8 см и 15 см — по другую сторону диагонали.

63. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 17 см и 39 см, а расстояние между центрами 44 см. Определить длину общей хорды.

64. Определить площадь параллелограмма, если одна из его сторон равна 51 см, а диагонали равны 40 см и 74 см.

65. Определить площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 см и 29 см, а медиана третьей стороны равна 26 см.

66. В треугольнике по данным двум сторонам и площади определить третью сторону: 1) $a=17$, $b=28$, $S=210$; 2) $a=7$, $b=11$, $S=\sqrt{1440}$.

67. В треугольнике ABC даны три стороны: $AB=26$, $BC=30$ и $AC=28$. Определить часть площади этого треугольника, заключенную между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B .

68. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Определить радиус окружности, которая имеет центр на средней стороне и касается двух других сторон.

69. Вершины данного треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными прямыми площадь треугольника разделилась на три части: 28 м^2 , 60 м^2 и 80 м^2 . Определить стороны данного треугольника.

70. В четырехугольнике $ABCD$ дано: $AB=26 \text{ см}$, $BC=30 \text{ см}$, $CD=17 \text{ см}$, $AD=25 \text{ см}$ и диагональ $AC=28 \text{ см}$. Определить площадь четырехугольника и диагональ BD ,

Площадь
трапеции.

71. 1) Основания трапеции равны 35 см и 29 см, а площадь 256 см². Определить высоту трапеции.

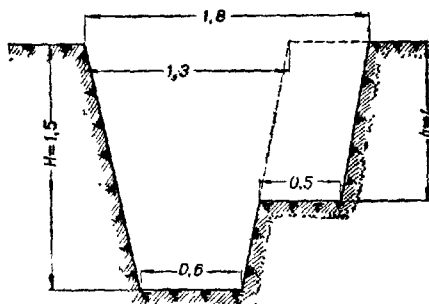
2) В трапеции высота равна 8 см, а площадь 2 дм². Определить длину средней линии.

3) Площадь трапеции равна 144 см², основания относятся, как 4:5; высота равна 16 см. Определить основания.

72. Определить площадь поперечного сечения окопа (черт. 52). Размеры даны в метрах.

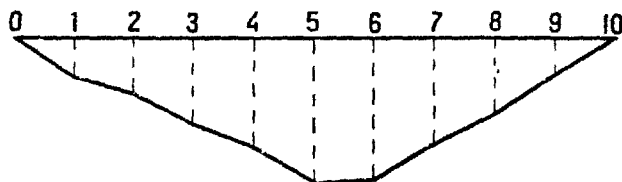
73. Вычислить площадь поперечного сечения реки, данного на

чертеже 53 (площадь „живого сечения“), по данным в таблице размерам глубины.



Черт. 52.

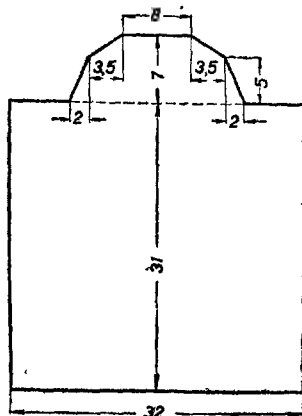
Расстояние от берега в метрах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Глубина в метрах	0	0,65	0,9	1,5	1,85	2,4	2,35	1,75	1,25	0,6	0



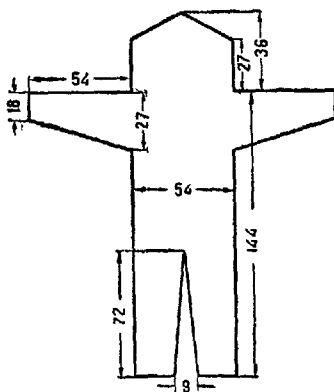
Черт. 53.

74. Чертеж 54 представляет собой план столовой в рабочем клубе; размеры даны в метрах. Определить площадь столовой.

75. Для изготовления костюма военной маскировки пользуются выкройкой, указанной на чертеже 55; размеры даны в сантиметрах. Вычислить площадь выкройки.



Черт. 54.



Черт. 55.

76. 1) Площадь трапеции $ABCD$ разделена пополам прямой EF , проведенной параллельно боковой стороне AB . Определить отрезок AF , если $AD = 28$ см и $BC = 12$ см.

2) Площадь трапеции делится диагональю в отношении 3:7. В каком отношении она делится средней линией (начиная от меньшего основания)?

77. В равнобедренной трапеции основания равны 51 см и 69 см, а боковая сторона 41 см. Определить площадь.

78. Определить площадь равнобедренной трапеции, в которой основания равны 42 см и 54 см, а угол при большем основании равен 45° .

79. В прямоугольной трапеции острый угол при основании равен 30° , сумма оснований равна m и сумма боковых сторон равна n . Определить площадь трапеции.

80. Определить площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные 13 см и 37 см.

81. В равнобедренной трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона равна 17 м и диагональ равна 39 м. Определить площадь этой трапеции.

82. 1) Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 12 см и 20 см , а диагонали взаимно перпендикулярны.

2) Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны, а высота равна h .

83. Определить площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ равна c и образует с большим основанием угол в 45° .

84. Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 10 см и 26 см , а диагонали перпендикулярны к боковым сторонам.

85. Определить площадь трапеции, у которой основания равны 142 см и 89 см , а диагонали 120 см и 153 см .

86. В круге радиуса R по одну сторону центра проведены две параллельные хорды, стягивающие дуги в 60° и 120° , и концы их соединены. Определить площадь полученной трапеции.

87. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, боковая сторона равна a , а острый угол при основании равен 30° . Определить площадь этой трапеции.

88. 1) Основание треугольника равно 75 см , а боковые стороны 65 см и 70 см . Высота разделена в отношении $2:3$ (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь получившейся при этом трапеции.

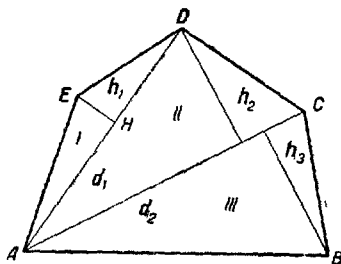
2) Диагонали трапеции 20 м и 15 м ; высота равна 12 м . Определить площадь трапеции.

89. Основания и боковая сторона равнобедренной трапеции относятся, как $10:4:5$. Площадь её равна 112 см^2 . Найти периметр трапеции.

Площадь многоугольника.

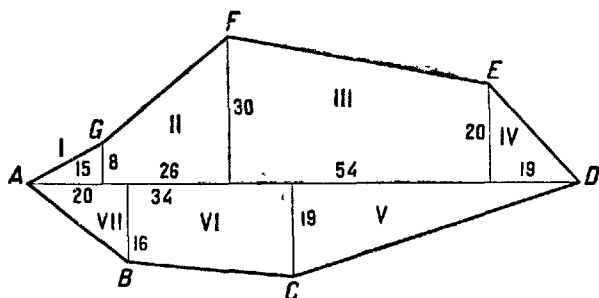
90. На чертеже 56 дан план участка зе-

мли в масштабе $1:10\,000$. На плане измерены его диагонали d_1 и d_2 и высоты h_1 , h_2 , h_3 . Дано: $d_1 = 44\text{ мм}$; $d_2 = 50\text{ мм}$; $h_1 = 7\text{ мм}$; $h_2 = 20,4\text{ мм}$ и $h_3 = 21,6\text{ мм}$. Выразить площадь участка в гектарах.



Черт. 56.

91. Вычислить площадь участка земли, план которого дан на чертеже 57; размеры даны в метрах.



Черт. 57.

92. Определить площадь четырёхугольника, если его диагонали равны k и l и 1) взаимно перпендикулярны, 2) образуют угол в 30° .

93. На сторонах прямоугольника построены вне его равносторонние треугольники и свободные вершины их соединены. Определить площадь получившегося четырёхугольника, если стороны данного прямоугольника равны a и b .

94. На отрезке AE взята точка C так, что $AC = a$ и $CE = b$. На отрезках AC и CE построены по одну сторону равносторонние треугольники ABC и CDE , и вершины B и D соединены. Определить площадь четырёхугольника $ABDE$.

95. Пусть M будет середина стороны AD в четырёхугольнике $ABCD$. Дано: $MB \perp AB$; $MC \perp CD$; $AD = 50$ см, $AB = 15$ см и $CD = 7$ см. Требуется определить площадь $ABCD$.

96. На окружности радиуса r последовательно взяты дуги: $AB = 30^\circ$, $BC = 60^\circ$, $CD = 90^\circ$ и $DE = 120^\circ$ и составлен пятиугольник $ABCDE$. Определить площадь этого пятиугольника.

97. 1) Периметр описанного многоугольника равен 60 см, а площадь содержит 240 см². Определить радиус круга.

2) Около окружности радиуса, равного 25 см, описан многоугольник, площадь которого равна 20 дм². Определить его периметр.

98. Определить площадь правильного треугольника, описанного около окружности радиуса r .

99. Сторона правильного шестиугольника равна 84 см; вычислить сторону равновеликого ему правильного треугольника.

100. Пол в комнате желают выстлать паркетом в форме правильного шестиугольника со стороной в 12 см. Предполагаемая к покрытию таким паркетом площадь пола имеет следующие размеры: 7,48 м в длину и 3,25 м в ширину. Определить нужное число паркетных плиток.

101. Комната длиной 5,6 м и шириной 4,5 м имеет балкон в форме половины правильного шестиугольника со стороной 1,6 м. Определить площадь пола комнаты и балкона.

102. 1) По данному радиусу R определить площадь правильного вписанного шестиугольника.

2) По данному радиусу r определить площадь правильного описанного шестиугольника.

3) Определить сторону правильного шестиугольника по его площади S .

103. По данному радиусу R определить площадь правильных вписанных восьмиугольника и двенадцатиугольника.

104. Сечение железобетонной сваи имеет вид правильного восьмиугольника. Наибольшее расстояние между противоположными вершинами равно 224 мм. Определить площадь сечения.

105. Расстояние между противоположными гранями восьмигранного железа равно 36 мм. Вычислить площадь поперечного сечения.

106. 1) По данной площади Q правильного вписанного двенадцатиугольника определить площадь правильного шестиугольника, вписанного в ту же окружность.

2) По данной площади Q правильного вписанного восьмиугольника определить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

107. 1) Окружность радиуса R разделена на шесть равных частей, и точки деления соединены через одну. Определить площадь полученной шестиугольной звезды.

2) Окружность радиуса R разделена на восемь равных частей, и точки деления соединены через одну. Определить площадь полученной восьмиугольной звезды.

108. 1) Всякая прямая, проходящая через центр симметрии параллелограмма, делит его на две равновеликие части. Доказать.

2) Провести через данную точку прямую, делящую площадь данного параллелограмма пополам.

**Сравнение
площадей
треугольников
и многоуголь-
ников.**

109. Разделить данный параллелограмм на n равновеликих частей прямыми, исходящими из его вершины, если 1) $n=6$; 2) $n=5$.

110. Середина одной из диагоналей четырёхугольника соединена с концами другой диагонали. Доказать, что полученная ломаная делит четырёхугольник на две равновеликие части.

111. Если диагональ какого-нибудь четырёхугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырёхугольника. Доказать.

112. 1) Прямая, проходящая через середины параллельных сторон трапеции, делит её на две равновеликие части. Доказать.

2) На прямой, соединяющей середины оснований трапеции, взята точка и соединена со всеми вершинами трапеции. Доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

113. 1) Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника. Доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

2) Если в трапеции середину M одной боковой стороны AB соединить с концами другой боковой стороны CD , то площадь полученного треугольника CMD составит половину площади трапеции. Доказать.

114. Диагональ трапеции делит её площадь в отношении 3:7. В каком отношении разделится площадь этой трапеции, если из конца верхнего основания провести прямую, параллельную боковой стороне?

115. 1) Построить квадрат, равновеликий сумме двух данных квадратов со сторонами a и b ($a=5$ см и $b=12$ см).

2) Построить квадрат, площадь которого в три раза больше площади данного квадрата со стороной a .

116. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты, и свободные вершины их соединены. Определить площадь получившегося шестиугольника, если катеты данного треугольника равны a и b .

117. Как относятся между собой площади P и Q двух треугольников, имеющих по равному углу, заключённому в первом треугольнике между сторонами в 12 дм и 28 дм, а во втором — между сторонами в 21 дм и 24 дм?

118. В треугольнике ABC сторона BA продолжена на длину $AD=0,2BA$ и сторона BC — на длину $CE=\frac{2}{3}BC$;

точки D и E соединены. Найти отношение площадей треугольников ABC и DBE .

119. Свойство биссектрисы треугольника вывести из сравнения площадей.

120. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если каждую сторону увеличить в 4 раза? в 5 раз?

121. Сторона треугольника равна 5 дм. Чему равна сходственная сторона подобного ему треугольника, площадь которого вдвое более?

122. Какую часть площади (считая от вершины) отсекает средняя линия треугольника?

123. Высота треугольника равна h . На каком расстоянии от вершины находится параллель к основанию, делящая площадь треугольника пополам?

124. 1) Боковая сторона треугольника разделена в отношении $2:3:4$ (от вершины к основанию), и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. В каком отношении разделилась площадь треугольника?

2) Через точку E , делящую сторону AB треугольника ABC в отношении $m:n$, проведена параллель к BC . В каком отношении находятся площадь отсечённого треугольника и площадь получившейся трапеции?

125. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его боковую сторону в отношении $5:3$ (начиная от вершины), а площадь — на части, разность которых равна 56 см^2 . Определить площадь всего треугольника.

126. Прямыми, параллельными основанию, площадь треугольника разделилась в отношении $9:55:161$ (от вершины к основанию). В каком отношении разделились боковые стороны?

127. Какую часть площади одноимённых описанных фигур составляют площади следующих вписанных: 1) правильного треугольника; 2) квадрата; 3) правильного шестиугольника? (Решить, не вычисляя самих площадей.)

128. Сумма площадей трёх подобных многоугольников равна 232 дм^2 , а периметры их относятся, как $2:3:4$. Определить площадь каждого многоугольника.

129. На сторонах прямоугольного треугольника построены подобные фигуры, причём стороны треугольника являются сходственными сторонами этих фигур. Доказать, что площадь фигуры, построенной на гипотенузе, равна сумме площадей фигур, построенных на катетах.

130. 1) Построить квадрат, равновеликий разности двух данных квадратов.

2) Построить квадрат, равновеликий сумме n данных квадратов.

131. Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику.

132. Дано отношение сторон двух квадратов и один из них; построить другой квадрат.

133. В параллелограмме соединены середина каждой стороны с концом следующей стороны, отчего получился внутренний параллелограмм. Доказать, что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного параллелограмма.

134. Как относятся между собой основания такой трапеции, которая равновелика своему дополнительному треугольнику?

135. Площадь прямоугольного треугольника разделена пополам прямой, перпендикулярной к гипотенузе. Найти расстояние между этой прямой и вершиной меньшего острого угла, если больший катет равен 20 м.

136. В прямоугольном треугольнике катеты относятся, как 3:4, а высота делит площадь треугольника на части, разность которых равна 84 дм^2 . Определить площадь всего треугольника.

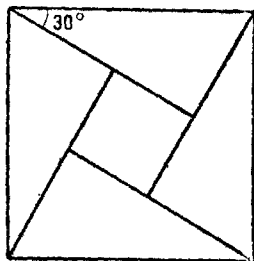
137. 1) Три медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . Доказать, что площадь треугольника AMB составляет треть площади треугольника ABC .

2) Три медианы треугольника делят его площадь на шесть равных частей. Доказать.

138. Из внешней точки A проведены к кругу касательная AB и секущая ACD . Определить площадь треугольника CBD , если $AC:AB=2:3$ и площадь $\triangle ABC$ равна 20 дм^2 .

139. AB и CD — две непересекающиеся хорды, причём $\angle AB = 120^\circ$ и $\angle CD = 90^\circ$; M — точка пересечения хорд AD и BC . Определить площади AMB и CMD , если их сумма содержит 100 см^2 .

140. AB — диаметр; BC и AC — хорды, причём $\angle BC = 60^\circ$; D — точка пересечения продолженного диаметра



Черт. 58.

и касательной CD . Найти отношение площадей DCB и DCA .

141. Каждая сторона квадрата повернута на 30° внутрь квадрата, как указано на чертеже 58. Определить отношение сторон и площадей данного квадрата и квадрата, образованного повернутыми сторонами.

142. $ABCD$ — данный квадрат; E и F — середины сторон CD и AD ; M — точка пересечения прямых BE и FC . Доказать, что площадь $\triangle BMC$ составляет $\frac{1}{5}$ площади квадрата.

143. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся, как $m:n$. Найти отношение площади ромба к площади треугольника.

§ 14. Определение в треугольнике медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов.

Вычисление медиан.

1. Стороны треугольника равны a, b, c . Доказать, что медиана m_c , проведённая к стороне c , равна $\frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

2. 1) Основание треугольника равно 22 дм, а боковые стороны 13 дм и 19 дм. Определить медиану основания.

2) Определить все медианы треугольника, в котором $a=2$, $b=3$, $c=4$.

3. В треугольнике две стороны равны 11 и 23 и медиана третьей стороны равна 10. Найти третью сторону.

4. В треугольнике одна из сторон равна 26 дм, а её медиана равна 16 дм. Определить две другие стороны этого треугольника, если они относятся, как 3:5.

5. Медианы равнобедренного треугольника равны 15, 15 и 18. Найти площадь треугольника.

6. Основание треугольника равно 23; медианы боковых сторон равны 15 и $22\frac{1}{2}$. Найти третью медиану.

7. 1) Построить треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания.

2) Основание треугольника равно 10, а медианы двух других сторон равны 9 и 12. Найти площадь треугольника.

8. 1) Построить треугольник по трём медианам.

2) Медианы треугольника равны 9, 12 и 15. Найти площадь треугольника.

Биссектрисы.

9. Квадрат биссектрисы угла при вершине треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания. Доказать.

10. В треугольнике ABC определить биссектрису угла A при следующей длине сторон: 1) $a=7$, $b=6$, $c=8$; 2) $a=18$, $b=15$, $c=12$; 3) $a=39$, $b=20$, $c=45$.

11. В треугольнике две стороны равны 6 и 12, а угол между ними 120° . Определить биссектрису данного угла.

12. По данным двум сторонам треугольника и биссектрисе угла между ними определить отрезки третьей стороны: $b=20$; $c=45$; $b_A=24$.

Радиусы вписанного и описанного кругов.

13. 1) Доказать, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанного круга равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

2) Катеты равны 40 см и 42 см. Определить радиусы кругов описанного и вписанного.

14. Определить относительное положение центра описанного около треугольника круга, если даны три стороны треугольника или отношение их: 1) 5, 8, 10; 2) 8, 7, 5; 3) 80, 315, 325.

15. Доказать, что во всяком треугольнике произведение двух сторон равно произведению диаметра описанного круга на высоту, опущенную на третью сторону.

16. Площадь треугольника равна S ; его периметр равен $a+b+c=2p$. Доказать, что: 1) радиус вписанного круга $r=\frac{S}{p}$; 2) радиус описанного круга $R=\frac{abc}{4S}$.

17. Для треугольника определить R и r при следующей длине сторон: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

18. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6, высота равна 4. Найти радиус описанного круга.

19. В круг радиуса R вписан треугольник; один из его углов равен: 1) 30° ; 2) 45° . Найти противолежащую сторону треугольника.

20. Доказать справедливость формулы:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

21. Определить площадь треугольника по данному радиусу R описанного круга и двум углам, содержащим 45° и 60° .

22. Определить катеты прямоугольного треугольника, если они относятся между собой, как 20:21, а разность между радиусами кругов описанного и вписанного равна 17 см.

23. В круг радиуса R вписан прямоугольник $ABCD$. Определить площадь этого прямоугольника, если дуга AB содержит α градусов [α равно: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 90°].

§ 15. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей.

Длина окружности и дуги.

1. Вычислить длину окружности, если радиус равен: 1) 10 м; 2) 15 м; 3) 35 см.

2. Вычислить радиус, если длина окружности равна: 1) 1 м; 2) 25 см; 3) 4,75 дм.

3. Расстояние между серединами двух зубцов зубчатого колеса, имеющего 0,66 м в диаметре, равно 34,5 мм, считая по дуге. Сколько зубцов имеет колесо?

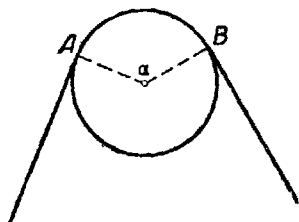
4. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Определить скорость точки, лежащей на окружности шкива.

5. По данному радиусу R определить длину дуги, содержащей: 1) 45° ; 2) $24^\circ 30'$; 3) $5^\circ 14' 15''$.

6. Определить радиус дуги, если её длина равна l , а градусная мера: 1) 135° ; 2) $10^\circ 40'$.

7. Окружность шкива (черт. 59) имеет длину 540 мм, ремень касается шкива по дуге длиной 200 мм. Определить угол обхвата шкива ремнём (α).

8. Радиус железнодорожного закругления равен 1200 м; длина дуги равна 450 м. Сколько градусов содержит дуга?



Черт. 59.

9. 1) Окружность радиуса 2 см разогнута в дугу радиуса 5 см. Найти получившийся центральный угол.

2) Дуга радиуса 4 см, измеряющая центральный угол в 120° , равна длине некоторой окружности. Найти радиус этой окружности.

3) Окружность радиуса 6 см разогнута в дугу, измеряющую центральный угол в 300° . Найти радиус дуги.

10. Определить число градусов дуги, если дан её радиус R и длина l : 1) $R=10$, $l=45$; 2) $R=15$, $l=6$.

11. Сколько градусов и минут в дуге, длина которой равна радиусу ($\frac{1}{\pi} = 0,31831$)?

12. По данной хорде a определить длину её дуги, если она содержит: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

13. По данной длине дуги l определить её хорду, если дуга содержит: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

14. Определить радиус окружности, если она длиннее своего диаметра на 107 см.

15. 1) На сколько увеличится длина окружности, если радиус увеличится на m ?

2) Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и футбольный мяч по его большому кругу. Далее, вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 м. Тогда обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и останется некоторый прозор (промежуток). В каком случае этот прозор был бы больше: у земного шара или мяча?

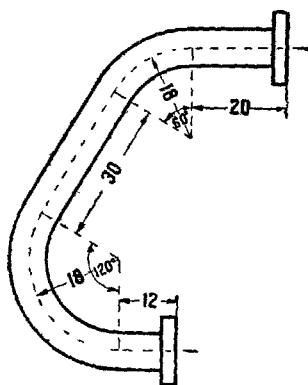
16. 1) Железная труба со стенками толщиной в 6 мм имеет внешнюю окружность в 22 см. Найти длину внутренней окружности.

2) Из двух концентрических окружностей одна равна 167 см, а другая 117 см. Определить ширину кольца.

17. Определить длину окружности, если она более периметра правильного вписанного шестиугольника на 7 см.

18. Дуга сегмента содержит 120° и имеет длину l . Определить длину окружности, вписанной в этот сегмент.

19. Из концов дуги ABC , содержащей 120° , проведены касательные до взаимного пересечения в точке D ,



Черт. 60.

и в полученную фигуру $ABCD$ вписана окружность¹. Доказать, что длина этой окружности равна длине дуги ABC .

20. На чертеже 60 даны вид и размеры в сантиметрах коленчатой трубы паровой машины. Найти её длину. (Её длина измеряется по средней пунктирной линии.)

21. Найти радиус такой окружности, длина и площадь круга которой выражаются одним и тем же числом.

22. Определить относительную погрешность при замене длины полуокружности $\frac{1}{2}C$ через $a_3 + a_4$ (для приближённого спрямления окружности)

23. Одно из приближённых спрямлений окружности состоит в том, что её заменяют периметром прямоугольного треугольника, у которого один катет равен $\frac{6}{5}$ диаметра, другой катет составляет $\frac{3}{5}$ диаметра. Определить абсолютную погрешность.

Площадь
круга.

24. Определить площадь круга при следующей длине радиуса: 1) 10 м; 2) 4 дм; 3) 2,6 см (взять $\pi = 3,14$)

25. Определить радиус круга, если его площадь равна: 1) 2 см²; 2) 50 м²; 3) 17 дм².

26. Лошадь привязана к колу верёвкой, длина которой равна 10,5 м. Найти площадь участка, на котором она может пастись. (С точностью до 0,01 кв. м.)

27. Найти площадь круга поршня воздушного насоса, диаметр которого равен 10 см.

28. Поршень насоса имеет площадь сечения в 12,56 см². Найти диаметр поршня.

29. Дерево имеет 1,884 м в обхвате. Чему равна площадь его поперечного сечения, имеющего (приблизительно) форму круга?

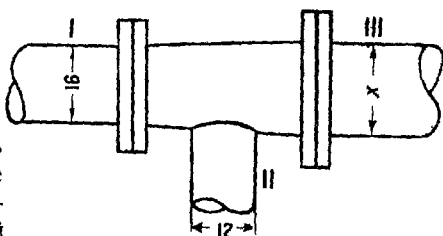
30. Какой груз выдерживает пеньковый канат, имеющий 18 см в окружности, если допускаемая нагрузка равна 100 кг/см²?

31. 1) Определить площадь круга, если длина окружности равна 8 см.

2) Определить длину окружности, если площадь круга равна 18 см².

32. 1) Пропускная способность трубы III (черт. 61) та же, что и у труб I и II вместе. Определить построением величину x по данным на чертеже размерам.

2) Две трубы с диаметром в 6 см и в 8 см требуется заменить одной трубой той же пропускной способности. Найти диаметр этой трубы.



Черт. 61.

33. Определить площадь круга, если площадь вписанного квадрата равна F .

34. Вычислить площадь круга, если она меньше площади описанного квадрата на $4,3 \text{ м}^2$.

35. Найти отношение между площадями вписанного и описанного кругов: 1) для правильного треугольника; 2) для квадрата; 3) для правильного шестиугольника.

Площадь
кольца.

36. Вертикальный цилиндрический котёл 78 см в диаметре и весящий 752 кг имеет в днище круглое отверстие, наружный диаметр которого равен 36 см. Всей площадью своего днища котёл опирается на фундамент. Определить давление, оказываемое котлом вследствие его тяжести на 1 см^2 поверхности фундамента.

37. В кольце, образованном двумя концентрическими окружностями, хорда большей окружности, касающаяся меньшей, равна a . Определить площадь кольца.

38. Круга касаются шесть равных ему кругов, касающихся также между собой, и полученное соединение семи равных кругов охвачено таким концентрическим кольцом, которое равновелико их сумме. Доказать, что ширина кольца равна радиусу кругов.

Сектор
и сегмент.

39. Определить площадь сектора, если радиус равен r , а дуга содержит: 1) $67^\circ 30'$; 2) $15^\circ 45'$.

40. Определить радиус сектора, если его площадь равна q , а центральный угол равен: 1) 72° ; 2) 36° .

41. Радиус сектора равен r , а площадь равна q . Определить величину центрального угла (или дуги).

42. Определить площадь сегмента, если радиус равен R , а дуга содержит:

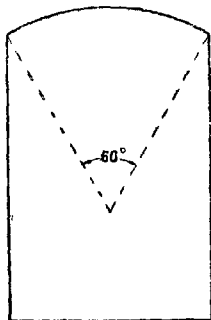
- 1) 90° ; 2) 60° ; 3) 45° ; 4) 30° .

43. Определить площадь сегмента, если хорда равна a , а дуга содержит:

- 1) 120° ; 2) 90° ; 3) 60° .

Площадь фигур, ограниченных прямыми и дугами окружностей.

44. Определить площадь окна (черт. 62), имеющего форму прямоугольника, законченного сверху дугой круга в 60° ; высота



Черт. 62.

окна, считая от середины дуги до основания, равна $2,4$ м, ширина его $1,6$ м.

45. 1) Полуокружность радиуса r разделена на три разные части, и точки деления соединены с концом диаметра. Определить площадь средней части полуокруга.

2) Концы дуги CD одинаково удалены соответственно от концов диаметра AB . Определить площадь, заключённую между дугой CD и хордами AC и AD , если площадь круга равна Q и дуга CD содержит n° .

46. В круге радиуса R проведены по одну сторону центра две параллельные хорды, из которых одна стягивает дугу в 120° , а другая в 60° . Определить часть площади круга, заключённую между хордами.

47. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и стягивает в одном круге дугу в 60° , а в другом — дугу в 90° . Определить площадь общей части кругов (два случая).

48. Площадь круга Q . Определить площадь вписанного в него прямоугольника, стороны которого относятся, как $m : n$.

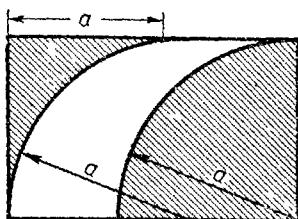
49. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого составляет половину площади круга. Определить стороны этого прямоугольника.

50. Около круга, площадь которого равна Q , описан ромб с углом в 30° . Определить площадь этого ромба.

51. Около правильного треугольника с площадью Q описана окружность, и в тот же треугольник вписана окружность. Определить площадь кольца, заключённого между этими окружностями.

52. AMB — дуга, содержащая 120° ; OA и OB — радиусы; AC и BC — касательные; DME — дуга, описанная из центра C между CA и CB и касающаяся дуги AMB . Найдите отношение между площадями секторов $CDME$ и $OAMB$.

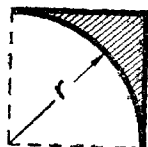
53. Из концов дуги ACB проведены касательные до пересечения в точке D . Определить площадь $DACB$, заключённую между двумя касательными и дугой, если радиус равен R , а дуга содержит: 1) 90° ; 2) 120° ; 3) 60° .



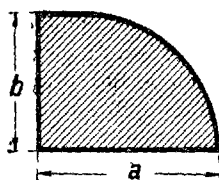
Черт. 63.

54. Из центра равностороннего треугольника описана окружность, пересекающая его стороны так, что внешние дуги содержат по 90° . Обозначая сторону этого треугольника через a , определить площадь, ограниченную внутренними дугами и средними отрезками сторон.

55. 1) Во сколько раз увеличится площадь круга, если диаметр его увеличить в 3 раза? Во сколько раз площадь уменьшится, если радиус уменьшить в 5 раз?



Черт. 64.



Черт. 65.

2) Во сколько раз надо уменьшить радиус круга, чтобы площадь уменьшилась в 4 раза? Во сколько раз надо увеличить диаметр круга, чтобы площадь увеличилась в 5 раз?

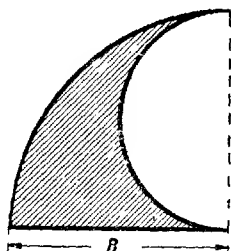
56. Можно ли водопроводную трубу диаметром в 50 мм заменить двумя трубами диаметром в 25 мм каждая? Одинакова ли площадь сечения одной большой трубы и двух малых?

57. Вычислить площадь заштрихованной части прямоугольника, данного на чертеже 63.

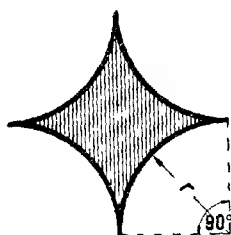
58. Определить площадь фигур, заштрихованных на чертежах 64—67, по данным размерам.

59. Два равных полукруга наложены так, что диаметры их параллельны, а полуокружность одного проходит через центр другого. Определить площадь общей части полукругов по данному их радиусу R .

60. На каждой стороне квадрата, принятой за диаметр, описана полуокружность, лежащая внутри квадрата. Определить площадь полученной розетки, если стороны квадрата равны a .



Черт. 66.

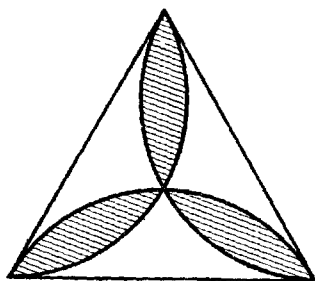


Черт. 67.

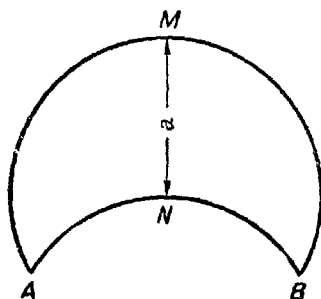
61. На сторонах ромба описаны, как на диаметрах, полуокружности, обращённые внутрь. Диагонали ромба равны a и b . Определить площадь полученной розетки.

62. Диаметр разделен на равные части, из обоих его концов проведены полуокружности во все точки деления, причём из одного конца все полуокружности сверху, а из другого все снизу. Доказать, что полученными изогнутыми линиями круг разделится на части равной величины, а периметр каждой части равен длине окружности.

63. В равностороннем треугольнике проведены дуги между каждыми двумя вершинами через центр треугольника (черт. 68). Сторона треугольника равна a . Определить площадь полученной розетки.



Черт. 68.

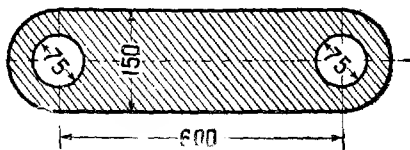


Черт. 69.

64. Между точками A и B проведены две дуги, обращённые выпуклостью в одну сторону: дуга AMB содержит 240° и дуга ANB 120° . Расстояние между серединами этих дуг равно a . Определить площадь луночки (черт. 69).

65. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра. Из точки D , как из центра, радиусом DA описана дуга AMB . Доказать, что луночка $AMBC$ равновелика треугольнику ABD .

66. Из точки C данной полуокружности опущен перпендикуляр CD на диаметр AB , и на отрезках AD и DB построены новые полуокружности по одну сторону с данной. Доказать, что площадь, заключённая между тремя полуокружностями, равна площади круга с диаметром CD .



Черт. 70.

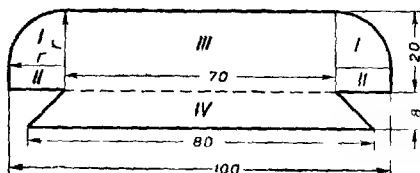
67. Вычислить площадь фигуры, заштрихованной на чертеже 70. Размеры даны в миллиметрах.

68. Вычислить площадь сечения, изображённого на чертеже 71. Размеры даны в миллиметрах.

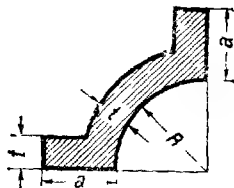
69. Определить площадь поперечного сечения фасонного железа, изображённого на чертеже 72.

70. Две параллельные хорды равны 14 м и 40 м , а расстояние между ними 39 м . Определить площадь круга.

71. Определить радиус круга, вписанного в данный сектор, если радиус сектора равен R , а дуга содержит α градусов [α равно: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120°].



Черт. 71.



Черт. 72.

§ 16. Приложение алгебры к геометрии. Деление в среднем и крайнем отношении.

Построение
формул.

1. 1) Построить отрезки, равные $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$.

2) На чертеже 73 дано: $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HK = KL = 1$, причём $AB \perp AO$, $BC \perp BO$, $CD \perp CO$ и т. д. Вычислить: OB , OC , OD , OE , OF , OG , OH , OK , OL .

3) Построить отрезки, равные: $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{5}\sqrt{6}$.

2. Построить треугольник со сторонами: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.

3. Указать измерения следующих выражений, в которых каждая буква, кроме π , обозначает длину отрезка:

1) $3,5a$; 2) $2\pi R$; 3) $R\sqrt{3}$;

4) $\frac{bh}{2}$; 5) abc ; 6) $\pi r^2 h$;

7) $\frac{abc}{d}$; 8) $\frac{3a}{2b+c-4d}$; 9) \sqrt{ab} ;

10) $0,5\pi D$; 11) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

12) $\sqrt[3]{a^2 h}$; 13) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

14) $2\pi R^2 + 2\pi RH$; 15) $\frac{\pi D^2 H}{4}$;

16) $\frac{(a+b)h}{2}$; 17) $\frac{4}{3}\pi R^3$;

18) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4. Какие из следующих формул неоднородны:

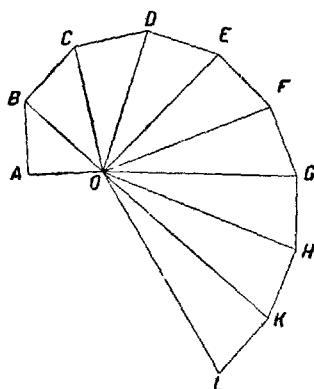
1) $x = \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{d} - 3a$; 2) $x = \sqrt{c-2}$; 3) $x^2 = \frac{a^3-b^3}{a+b}$;

4) $x = 2$; 5) $x = a + bc^2$; 6) $x = \frac{a}{b}$?

5. Построить треугольник со сторонами $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 1$, $c = 2\sqrt{3}$.

6. Построить отрезки, выражаемые следующими формулами:

1) $x = 3\frac{1}{2}a$; 2) $x = a - (b + 3d)$; 3) $x = 3c - (2m - n)$;



Черт. 73.

$$4) x = \frac{2ab}{3c}; \quad 5) x = \frac{ab}{c+d}; \quad 6) x = \frac{a^2}{b};$$

$$7) x = \pi r; \quad 8) x = \frac{pqr}{st}; \quad 9) x = \frac{ab}{c-d}.$$

7. Построить отрезки, выражаемые следующими формулами.

$$1) x = \sqrt{3ab}; \quad 2) x = \sqrt{\frac{a^2b}{c}}; \quad 3) x = \sqrt{a^2 \pm b^2};$$

$$4) x = \sqrt{4a^2 - b^2}; \quad 5) x = \sqrt{b^2 + 3c^2}; \quad 6) x = a \sqrt{\frac{a+c}{b+d}}.$$

**Построение
фигур.**

8. Построить квадрат, равновеликий данному равностороннему треугольнику со стороной a .

9. Построить круг, площадь которого вдвое больше площади данного круга с радиусом R .

10. Данный круг с радиусом R разделить пополам концентрической окружностью.

11. Построить квадрат, равновеликий $\frac{3}{5}$ параллелограмма со стороной a и опущенной на неё высотой h .

12. Построить круг, равновеликий кольцу между двумя концентрическими окружностями с радиусами R и r .

13. По данному основанию a и прилежащему к нему углу в 30° построить треугольник, равновеликий данному треугольнику с основанием b и высотой h .

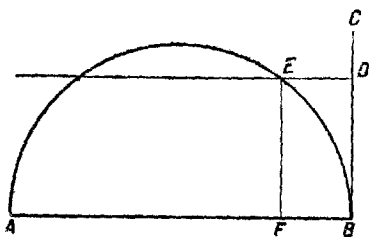
14. Построить корни квадратных уравнений $x^2 \pm px \pm q^2 = 0$.

**Построение
корней квадратного уравнения.**

15. 1) На AB , как на диаметре (черт. 74), описана полуокружность. Дано: $AB = p$; $BC \perp AB$; $BD = q$; $DE \parallel AB$; $EF \perp AB$. Доказать, что отрезки AF и FB служат корнями квадратного уравнения $x^2 - px + q^2 = 0$.

2) Применить рассмотренное построение к построению корней уравнения: $x^2 - 6,5x + 4 = 0$, не решая уравнения.

3) Почему применение этого способа к уравнению $x^2 - 2,5x + 9 = 0$ не даёт желательных результатов?



Черт. 74.

**Деление
в среднем
и крайнем
отношении.**

16. Разделить данный отрезок a в среднем и крайнем отношении, т. е. разделить его на две части так, чтобы большая часть была средней пропорциональной между всем отрезком и его меньшей частью.

17. 1) Доказать, что сторона правильного вписанного десятиугольника равна большему отрезку радиуса, разделённого в среднем и крайнем отношении.

2) По данному R вычислить a_{10} .

18. Если какой-нибудь отрезок разделён в среднем и крайнем отношении, то большая часть составляет приблизительно $\frac{5}{8}$ всего отрезка. Проверить это и определить степень точности такого приближения.

19. 1) Определить большую часть при делении отрезка в среднем и крайнем отношении, если меньшая часть равна b .

2) Если меньшую часть отрезка, разделённого в среднем и крайнем отношении, отложить на большей части, то большая часть также разделится в среднем и крайнем отношении. Доказать.

20. Диаметр разделён в среднем и крайнем отношении перпендикуляром, проведённым из точки окружности. Радиус окружности равен r . Найти длину перпендикуляра.

21. Доказать, что в правильном пятиугольнике две пересекающиеся диагонали взаимно делятся в среднем и крайнем отношении.

22. Если радиус круга разделить в среднем и крайнем отношении и, взяв большую часть, описать ею концентрическую окружность, то площадь данного круга тоже разделится в среднем и крайнем отношении, причём большей частью будет кольцо. Доказать это.

**Применение
алгебраического
метода.**

23. На продолжении диаметра круга радиуса r найти такую точку, чтобы касательная, проведённая из неё к данному кругу, равнялась диаметру.

24. В данную полуокружность вписать квадрат.

25. Дан треугольник с основанием a и высотой h . Вписать в него прямоугольник, имеющий данный периметр $2p$.

26. Данный треугольник разделить пополам прямой, параллельной его основанию.

27. Площадь треугольника разделить пополам прямой, перпендикулярной к основанию.

28. Вписать в данный ромб прямоугольник, стороны которого были бы параллельны диагоналям ромба и площадь которого равнялась бы $\frac{1}{3}$ площади ромба.

29. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник так, чтобы одна из вершин у них была общая.

30. В квадрат со стороной a вписать другой квадрат со стороной b .

31. Построить окружность, касающуюся данной окружности радиуса r и данной прямой в данной на ней точке.

32. Даны два прямоугольника. Построить третий прямоугольник, изопериметричный с одним из данных прямоугольников и равновеликий другому.

33. В данный треугольник вписать прямоугольник, основание которого относилось бы к высоте, как $m : n$.

34. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = a$ и $BC = b$. Провести прямую EF так, чтобы она отсекала параллелограмм $ABEF$, подобный $ABCD$.

35. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = a$ и $BC = b$. Провести прямую EF , параллельную AB , так, чтобы она разделила данный параллелограмм на два подобных между собой параллелограмма.

36. В углы A и C прямоугольника $ABCD$ вписать две равные окружности, которые касались бы между собой.

37. Через точки A и B провести окружность, отсекающую от данной прямой хорду данной длины m .

ОТВЕТЫ.

§ 1.

2. 14 м. 3. 9, 10 м. 4. 7 м. 5. 1 м. 8. 30 см. 9. 5,5 м. 10. $a = 4,25$ см, $b = 2,75$ см. 11. 0,6 м. 12. $AB \cdot BC = 1 (m - 1) = 1$ 4. 13. 8,1 м. 14. 96 м. 17. 1) Да, 2) да; 3) нет. 18. 1) 3; 2) 6, 10; 190; $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 2.

6. 1) $124^\circ 33'$; 2) $144^\circ 9' 15''$; 3) $162^\circ 1' 55''$. 8. 1) $47^\circ 49' 30''$; 2) $41^\circ 17' 30''$; 3) $84^\circ 48' 42''$. 9. 1) 20° ; 2) $55^\circ 37'$; 3) $67^\circ 17' 22''$. 12. 1) $178^\circ 30'$; 2) $69^\circ 35'$; 3) $166^\circ 37' 30''$. 14. 1) $31^\circ 5'$; 2) $73^\circ 52' 30''$; 3) $24^\circ 35' 27''$; 5) 4) $20^\circ 7' 35''$. 16. 1) $3\frac{1}{2}$; 2) $2\frac{3}{4}$; 3) 0,7. 17. 1) $\frac{3}{7}d$. 18. 1) $\frac{5}{7}d$. 20. Продолжить AB или CB за точку B . 21. 36° и 144° . 22. $\frac{8}{9}d$ и $1\frac{1}{9}d$. 23. 54° . 24. Да. 25. Да. 26. $\frac{3}{16}d$. 28. 72° и 144° . 29. $\frac{1}{3}d$; $\frac{4}{9}d$; $\frac{5}{9}d$; $\frac{2}{3}d$. 30. 36° . 31. 20° ; $22^\circ 30'$. 32. $1\frac{8}{11}d$. 33. $\frac{4}{15}d$; $\frac{8}{15}d$; $1\frac{1}{15}d$; $2\frac{2}{15}d$. 34. $1\frac{2}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; $1\frac{2}{5}d$. 36. 70° . 37. $1\frac{5}{8}d$.

§ 3.

2. 10 м. 7. Указание. Сначала доказать равенство треугольников DBE и DGF . 9. Равносторонний. 11. 1) Можно получить два треугольника, один или ни одного. 13. 1) Да; 2) нет; 3) нет. 14. 1) Нет; 2) да. 15. 2 м. 16. 0,3 м. 17. 10 м. 18. 10 см, 10 см, 1 см. 19. Указание. По теореме: $a < b + c$ прибавить к обеим частям неравенства по a . 20. Указание. Каждая сторона треугольника меньше суммы отрезков, соединяющих выбранную точку с её концами. 21. 13 м. 22. 15 м. 23. 10 см. 24. 8 м. 29. Дорога должна проходить через середину отрезка, соединяющего точки B и C . 30. Указание. Построить точку, симметричную с одной из данных точек относительно AB , и соединить её с другой данной точкой. 32. Лишь внутри остроугольного треугольника. 33. Указание. Построить окружность с центром M и радиусом a и биссектрису угла. Точек может быть две, одна или ни одной. 34. Указание. Провести биссектрису противоположного угла. 36. Указание. 1) Построить биссектрису угла A

и перпендикуляр из середины BC . 2) Описать окружность с центром C и радиусом CB до пересечения со сторонами угла. Задача может иметь одно, два или три решения. 3) Построить точку, симметричную с вершиной A относительно прямой BC . 37. *Указание.* На второй стороне угла отложить отрезок $AB=l$ и из середины BD восстановить перпендикуляр. 38. 8 м, 20 м, 16 м, 32 м. 39. Нет. 41. 10 м. 42. 1) 2; 2) 7; 3) $n-3$. 43. 1) 4; 2) 6; 3) $n-2$. 44. 1) 5; 2) 35; 3) $\frac{(n-3)n}{2}$. 45. $n = \frac{3m}{m-1}$; 6; 4; невозможный случай. 46. $n = 2m + 3$; 4; 5; 7; 8.

§ 4.

1. 72° и 108° . 2. $\frac{11}{16}d$. 3. $1\frac{2}{7}d$. 4. Увеличить на $1\frac{1}{16}d$.
5. $\frac{5}{8}d$. 6. 43° ; 137° и 137° . 7. 135° и 45° . 8. 36° и 144° . 9. 50° или 130° .
10. $\frac{11}{24}d$. 11. 30° ; 60° ; 90° . 12. $\frac{14}{19}d$. 13. $44^\circ 59' 30''$. 14. $31^\circ 40'$. 15. 30° ;
 $17^\circ 30'$; 40° ; 45° . 16. $37^\circ 29' 46''$. 17. $38^\circ 34'$. 18. $\frac{5}{14}d$. 19. $\frac{8}{9}d$. 20. 15° .
21. 30° . 22. $\frac{4}{7}d$; $\frac{4}{7}d$; $\frac{6}{7}d$. 23. 7,3 м. 24. 1) 18 см; 2) 8 см. 25. *Указание.* Данный треугольник есть половина равностороннего. 26. *Указание.* Продолжить катет за вершину прямого угла, отложить отрезок, равный этому катету, и соединить с вершиной острого угла.
28. 1,2 м. 29. $A = \frac{4}{9}d$; $B = \frac{2}{3}d$; $C = \frac{8}{9}d$. 30. 60° . 31. $\frac{5}{6}d$.
32. $1\frac{3}{8}d$; $\frac{5}{16}d$; $\frac{5}{16}d$. 34. $\frac{2}{3}d$. 35. *Указание.* Применить теоремы: 1) об углах при основании равнобедренного треугольника и 2) о внутренних накрест лежащих углах при параллельных. 36. 90° . 37. 135° .
38. $\frac{2}{3}d$. 39. $\frac{d}{2}$. 40. $\frac{7}{15}d$; $\frac{7}{15}d$; $1\frac{1}{15}d$. 41. 1) $\frac{4}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; $\frac{3}{5}d$;
2) $1\frac{1}{5}d$; $\frac{2}{5}d$; $\frac{2}{5}d$. 42. *Указание.* Продолжить медиану на равное ей расстояние. 44. *Указание.* Вычислить $\angle CAD$ и $\angle CAE = \angle BAD$.
45. $1\frac{5}{9}d$. 46. *Указание.* Вычислить образовавшиеся углы. 47. $\angle D =$
 $= \frac{1}{2} \angle A$; $\angle E = \frac{1}{2} \angle C$; $\angle DBE = d + \frac{1}{2} \angle B$. 48. $1\frac{1}{12}d$.
49. $\frac{4}{15}d$; $\frac{4}{15}d$; $1\frac{7}{15}d$. 50. $\frac{11}{17}d$. 51. $\frac{7}{9}d$. 52. 1) 10 d; 2) 16 d; 3) 46 d.
53. 54° ; 81° ; 108° ; 135° ; 162° . 54. Увеличится на 10 d. 55. 1) 17; 2) 26;
3) невозможно. 56. В четырёхугольнике. 57. 13. 58. $2m + 2$.
59. $1\frac{4}{11}d$; $1\frac{10}{11}d$; $\frac{6}{11}d$; $\frac{2}{11}d$.

§ 5.

1. $1\frac{4}{7}d$; $3\frac{3}{7}d$; $1\frac{4}{7}d$. 2. $19\frac{19}{22}d$; $1\frac{3}{22}d$. 3. $BC=DA=6\text{ см}$; $CD=9\text{ см}$. 4. 0,6 м; 0,8 м. 5. $BE=9\text{ см}$; $EC=6\text{ см}$. 6. Четырёхугольник с двумя парами равных противоположных сторон есть параллелограмм. 7. 3 см; 2 см; 3 см. 8. 1) Нет; 2) нет; 3) да. 9. Указание. Доказать равенство внутренних накрест лежащих углов. 10. Может: два равных равнобедренных треугольника, приложенных боковыми сторонами. 12. 4,8 м. 13. $AD=BC=1\text{ м}$; $AB=BD=CD=0,9\text{ м}$. 16. 10 дм. 17. $\frac{6}{11}d$; $1\frac{5}{11}d$. 20. $\frac{4}{5}d$. 21. $\frac{5}{9}d$. 22. 1) Такая точка существует лишь в квадрате; 2) да. 23. 10 см и 18 см. 24. 1,2 м. 25. 4 м и 8 м. 26. 45° . 27. 12 см. 28. 25 см и 10 см или 18,75 см и 7,5 см. 29. 8 м. 36. 120° и 60° . 38. $\frac{14}{17}d$ и $1\frac{3}{17}d$. 39. 80° и 100° . 40. 60° и 120° . 41. 150° . 42. 1) Задача не имеет решения. 45. 4 м. 47. 1 м. 48. 2 м. 49. 2 м. 50. 2) 2 см. 51. 4 м и 8 м. 53. $2\frac{1}{2}\text{ м}$. 54. 4 см, 5 см, 6 см. 55. 6 см. 56. 2,4 м, 3,2 м, 4,8 м. 57. 3 дм. Указание. Провести через B прямую параллельно MN и опустить на неё перпендикуляры из A и O . 58. 3 дм. 59. 4 см, 5 см, 1 см. 61. 16 дм. 62. 13 см, 16 см, 19 см, 22 см, 25 см. Указание. Сначала доказать (вспомогательным построением), что параллельные отрезки полученного чертежа возрастают равномерно. 63. $\angle A=\frac{4}{7}d$; $\angle B=1\frac{3}{7}d$; $\angle C=1\frac{2}{7}d$; $\angle D=\frac{5}{7}d$. 64. $AD=0,8\text{ м}$. 65. Нет. 66. 4 м. 67. Ближе к большему основанию. 68. $12\frac{1}{2}\text{ см}$, $11\frac{1}{2}\text{ см}$. 69. 3 м, 2 м. 70. 6 дм и 10 дм. 71. 1:2. 73. 6 м. 74. $\frac{9}{13}d$ и $1\frac{4}{13}d$. 75. $\frac{2}{3}d$ и $1\frac{1}{3}d$. 76. 15 дм, 9 дм. 77. 1 м. 78. 24 см и 36 см. 79. 1,5 м, 4 м. 80. 1,7 м. 81. $m-h$; $m+h$. 82. 10 см. 83. $\frac{3}{4}a$. 84. а. Указание. Продолжить EF до пересечения с продолжением BC . 86. 1) Построение возможно лишь в том случае, когда разность оснований трапеции меньше суммы двух боковых сторон и больше их разности. Указание. Сначала построить треугольник, у которого боковые стороны равны боковым сторонам трапеции, а основание равно разности оснований трапеции. 2) Задача имеет решение лишь при условии, что сумма оснований трапеции меньше суммы диагоналей и больше их разности. Указание. Сначала построить треугольник, у которого боковые стороны равны диагоналям трапеции, а основание равно сумме её оснований. 87. 1) Параллелограмм, 2) параллелограмм, 3) ромб, 4) прямоугольник, 5) квадрат, 6) параллелограмм. 88. 5 дм, 4 дм; $56^\circ 25'$ и $123^\circ 35'$. 91. 1) 90° ; 2) 180° ; 3) 180° ; 4) 72° .

§ 6.

1. 4 см. 5. 1) 5 см и 25 см; 2) 7 см и 13 см. 6. $\frac{b \pm a}{2}$. 8. 60° .
 9. 120° . 10. 2 см. 11. 2 см и 4 см. 12. R. 13. 1 см. 14. 20 см и 12 см.
 15. 2,2 м. 16. $\angle AOD = \angle OAC + \angle ACO$; $\angle OAC = \angle OBA =$
 $= \angle BOC + \angle ACO = 2 \angle ACO$; $\angle AOD = 2 \angle ACO + \angle ACO =$
 $= 3 \angle ACO$. 17. 1) Задача неопределённая. Если же дана точка на
 окружности, то хорд можно провести две. 20. 60° . 21. 1) 10 см;
 2) 2 дм. 22. 2R. 23. 1 дм. 24. 0,5 м. 25. 14,13 см. 26. 9,42 см.
 27. 6 см. 28. 8 см. 29. $R - r$. 30. 5 см. 31. Центр сопрягающей полу-
 окружности лежит в середине отрезка, перпендикулярного к обеим
 параллельным. 32. Указание. Во всех случаях центр сопрягающей
 дуги лежит на биссектрисе угла между данными прямыми. 33. Две
 прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от неё на рас-
 стоянии, равном данному радиусу окружностей. 34. Указание.
 Центры окружностей лежат на перпендикуляре к данной прямой
 в данной точке (два решения). 35. Указание. Центр окружности
 лежит на перпендикуляре к данной прямой в точке B и на перпен-
 дикуляре к отрезку AB, проведённому через середину этого отрезка.
 36. Указание. Центр окружности лежит на биссектрисе угла.
 38. Указание. Центр окружности есть точка пересечения биссектрис
 двух внутренних односторонних углов. Задача имеет два решения.
 41. 1) Внешнее касание; 2) внутреннее касание; 3) одна окружность
 вне другой. 42. 1) Внешнее касание; 2) одна окружность внутри
 другой; 3) одна окружность вне другой; 4) пересечение. 43. 2 см.
 44. 9 см, 7 см. 45. 2 см. 46. 16 см. 47. Указание. Опустить из
 центра перпендикуляр на секущую. Его основание разделит по-
 полам обе хорды. 48. 6 см. 49. 1) R и 60° ; 2) Указание. Разделить
 окружность на три равные части, в точках деления провести кас-
 ательные; вершины треугольника, образованного касательными, со-
 единить с центром круга; получим три тупоугольных треугольника,
 в каждый из которых следует вписать окружность. 50. 9 см.
 51. 2 дм. Указание. Соединить центры всех вписанных кругов между
 собой и с центром данного круга и рассмотреть полученные тре-
 угольники. 52. 1 дм. 53. 1) Прямая, соединяющая центр с данной
 точкой. 54. 1) Две концентрические окружности. 57. Указание.
 Задача имеет в общем случае четыре решения. Найти условие, при
 котором задача имеет три решения.

§ 7.

- 1). 5° ; 2) 15° ; 3) $\frac{1}{3}$. 2. 1) 5° ; 2) $4^\circ 26' 40''$; 3) $21' 36''$;
 4) $25^\circ 42' 51 \frac{3''}{7}$; 5) $163^\circ 38' 10 \frac{10''}{11}$. 3. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) 0,3; 4) $\frac{1}{900}$;
 5) $\frac{1}{72000}$; 6) $\frac{5}{96}$; 7) $\frac{241}{43200}$; 8) $\frac{1}{2025}$. 4. 1) 150° ; 2) $47^\circ 5'$; 3) 155° .

5. 8 см. 6. 0,7 м. 7. $77^{\circ}59'23''$. 8. $16^{\circ}33'$. 9. $105^{\circ}14'$. 10. $148^{\circ}41'30''$.
 11. $94^{\circ}39'30''$. 12. $84^{\circ}22'30''$. 13. $285^{\circ}18'$. 14. $137^{\circ}34'$. 15. $123^{\circ}45'$ и $56^{\circ}15'$.
 16. $105^{\circ}48'30''$ или $36^{\circ}11'30''$. 17. $37^{\circ}30'$. 18. 95° и 120° . 19. $52^{\circ}30'$;
 $82^{\circ}30'$ и 45° . 20. 108° . 22. 40° . 24. 154° . 25. 50° . 26. 40° , 40° и 100° .
 27. Стороны треугольника делятся пополам, полуокружность — на
 3 равные части по 60° . 28. Помещая треугольник так, чтобы его
 катеты проходили через концы диаметра, отмечать положение вер-
 шинного прямого угла. 29. Искомая вершина лежит на окружности,
 построенной на гипотенузе, как на диаметре, и на прямой, парал-
 лельной основанию и отстоящей от него на расстоянии 2 см.
 31. Окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяю-
 щий центр данной окружности с данной точкой. 34. $67^{\circ}30'$.
 35. $36^{\circ}34'30''$. 36. $48^{\circ}50'$. 37. 45° . 38. $110^{\circ}52'$. 39. $78^{\circ}45'$. 40. 144° .
 41. $150^{\circ}27'$. 42. $180^{\circ} - \frac{m^{\circ}}{2}$. 43. 80° . 44. 72° . 45. Точка касания 46. 7° .
 47. $20^{\circ}30'$. 48. $106^{\circ}35'$ и $253^{\circ}25'$. 49. $33^{\circ}20'$. 50. 100° . 51. 18° . 52. 105° .
 53. $31^{\circ}12'$. 54. 60° . 55. $34^{\circ}54'$. 56. $15^{\circ}12'$ и $74^{\circ}48'$. 57. $\angle BAC = 110^{\circ}$;
 $\angle BCA = 30^{\circ}$; $\angle DAC = 80^{\circ}$; $\angle DCA = 60^{\circ}$. Указание. Воспользо-
 ваться окружностью, описанной около четырёхугольника $ABDC$.
 62. Указание. Задача сводится к задаче № 60. 63. 2 м. 64. 4 см.
 65. 1) 40° ; 2) 36° . 66. 50° и 130° . 67. 105° , 115° и 140° . 68. $55^{\circ}19'$ или
 $34^{\circ}41'$. 69. Указание. Начать с построения треугольника, образо-
 ванного основанием и отрезками, соединяющими центр вписанного
 круга с вершинами основания. 70. 6:5. 71. $p - r$. 73. 60 см. 75. Ука-
 зание. На касательной к данной окружности, как на стороне, по-
 строить данные углы и провести касательные, параллельные двум
 другим сторонам. 76. 1 м. 77. $25^{\circ}10'$; $154^{\circ}50'$; $25^{\circ}10'$ и $154^{\circ}50'$. 78. Ука-
 зание. 1) Центр вписанного круга лежит в точке пересечения диа-
 agonалей ромба. 79. 2 см. 80. 143° , 37° , 143° и 37° . 81. Вн. 82. 3 см.
 83. 25 см. 84. $\angle BCD = 109^{\circ}36'18''$; $\angle B = \angle D = 90^{\circ}$. 85. 1) Да;
 2) нет. 86. $\frac{1}{3}R$. 87. 81° . 88. 1) 3 м, 6 м, 9 м, 6 м; 2) 45° , 90° , 135° , 90° .

§ 8.

1. $AB:CD \approx 2,4$. 2. 0,87. 3. 1) $AM:AB = 1:3$; $MB:AB = 2:3$;
 2) $AK:AB = \frac{m}{m+n}$; $KB:AB = \frac{n}{m+n}$. 4. $BD = 12$ см и $AD =$
 $= 18$ см. 5. 10 мин. 6. 1) 15 м; 2) 9 м; 3) 22 дм. 7. 1) 12 дм; 2) 1,8 м;
 3) 3,4 м. 8. 1) Да; 2) да; 3) нет. 9. 1) 4 см, 8 см, 12 см, 16 см;
 2) 32,5 см, 35 см, 37,5 см, 40 см, 42,5 см, 45 см, 47,5 см. 10. 3 м
 и 2,4 м. 11. 16,15 м. 12. $OD = 1,8$ см; $OC = 1,6$ см; $DC = 1,6$ см.
 13. 2,5 м. 14. 10 м и 35 м или 35 м и 10 м. 15. Указание. В тре-
 угольнике, образованном сторонами угла и искомой прямой, пря-
 мая, параллельная одной стороне угла и проходящая через точку P ,
 делит две стороны треугольника в отношении $m:n$. 16. Указание.
 Точки, расстояния которых от сторон данного угла относятся, как
 m и n , делят в том же отношении отрезок, заключённый между
 сторонами угла и перпендикулярный к биссектрисе угла. 17. 1) $AD =$

$= 8$ м и $DC = 12$ м; 2) 10 м; 3) 1,8 м. 18. 10 см. 19. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да. 20. $BE = 7$ см; $EC = 5$ см. 21. 39 см и 65 см. 22. 8 см. 23. 50 см. 24. 16 см, 20 см, 20 см. 25. $BE = 10$ м, $EC = 14$ м. 26. $\frac{b}{a+c}$. 27. 6 см, 4 см и 6 см. 28. $\frac{ab}{a+b}$.

§ 9.

1. 1 м, 1,2 м. 2. 10 м, 25 м, 20 м. 3. 42,0 м (с точностью до 0,1). 4. 1) $b_1 = 35$, $c = 8$; 2) $c = 20$. 5. $AC = 24$ см; $EF = 18$ см; $DF = 15$ см. 6. 13,6 см. 7. $AC = 3$ м; $A_1C_1 = 1,2$ м. 8. $AC = 20$ см; $EF = 15$ см. 9. 1) Да; 2) да; 3) нет. 10. 1) Нет; 2) да. 11. 2,6 м. 12. 1) 1 м, 2 м и 2,5 м; 2) 6,5 м и 5,5 м. 13. 1,25 м. 14. 1) 14 см; 2) 6 дм. 15. 1) 4 см; 2) 27:28. 16. 2 м. 17. $\frac{bc}{a+c}$. 18. $BC = 12$ см; $BD:BA = 3:4$. 19. $AD = 1$ м, $DC = 3$ м. 20. Указание. Каждая сторона искомого треугольника есть четвёртая пропорциональная к трём отрезкам: периметру искомого треугольника, периметру данного треугольника и одной из сторон данного треугольника. 22. Указание. По углу и отношению отрезков основания построить треугольник, подобный искомого. 23. $OB = 15$ см, $OD = 12$ см. 24. $AO:OC = 20:9$; $AD = 40$ см, $BC = 18$ см. 25. $AB = 30$ см, $AD = 40$ см. 26. 18 см. 27. 20 см. 28. 300 м. 29. $\frac{a(m-n)}{n}$. 30. $\frac{bc}{a+2c}$. 31. 10 см и 12 см. 32. $\frac{bc}{b+c}$. 33. \sqrt{pq} . 34. Указание. Найти направление прямых, соединяющих середину хорды с вершинами квадрата. 35. Указание. Найти направление прямой, соединяющей одну из вершин треугольника с одной из вершин квадрата. 36. $\frac{ah}{a+h}$. 37. Указание. Найти направление прямой, соединяющей одну из вершин треугольника с одной из вершин прямоугольника. Задача имеет, вообще говоря, 6 решений. 38. 10 см и 18 см. 39. 12 см. 40. $\frac{ah}{a+2h}$. 41. $CD = 3$ см, $BD = 9$ см. 42. $AD = 6$ м, $BE = 8$ м. 43. 1 м. 44. 14 см и 10 см. 45. $\sqrt{2ar}$. 46. 10 см и 26 см. 47. $\frac{ab}{a+b}$. 48. 16 см. 49. $\frac{lm}{l+m}$. 50. 58 дм и 80 дм. 51. 20 м. 52. $OE = 6$ дм; $OD = 8$ дм. 53. 42 дм. 54. $\frac{ar}{a+2r}$. 55. 30 см, 24 см, 18 см, 36 см. 56. 18 м, 9 м, 12 м, 36 м. 57. 8 дм, 12 дм, 16 дм, 20 дм. 58. 100 м и 40 м. 59. $a:b = \sqrt{2} \approx 1,414$. 60. $\frac{a^2}{b}$.

§ 10.

1. 1) 37 см; 2) 65 см; 3) 41 дм; 4) 109 см; 5) $21\frac{1}{4}$; 6) $1\frac{9}{16}$; 7) 17; 8) $\sqrt{61} \approx 7,81$. 2. 1) 161; 2) 260, 3) 24, 4) 42; 5) $7\frac{1}{5}$; 6) $\sqrt{51} \approx 7,14$.

	a	b	c	a_c	b_c	h
1)	(15)	(20)	25	9	16	12
2)	(24)	(7)	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
3)	(4)	(5)	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
4)	(100)	75	(125)	80	45	60
5)	156	(65)	(169)	144	25	60
6)	(600)	175	(625)	576	49	168
7)	(6)	8	10	(3,6)	6,4	4,8
8)	24	(7)	25	23,04	(1,96)	6,72
9)	21	20	(29)	$(15\frac{6}{29})$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
10)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	(3)	1	(2)	$\sqrt{2}$
11)	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$(1\frac{1}{2})$	$(2\frac{2}{3})$	2
12)	$2\sqrt{10}$	$6\sqrt{10}$	20	(2)	(18)	6
13)	(136)	255	289	64	225	(120)
14)	40	(9)	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$(8\frac{32}{41})$

4. Указание. Воспользоваться § 190 из Киселёва. 5. Указание. Если разность отрезков $x - y = r$, а среднее пропорциональное $\sqrt{xy} = p$, то сумму отрезков можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами r и $2p$. 7. 50 см и 72 см. 8. 5,2 м. 9. 18 см, 98 см.

12. Воспользоваться задачей № 11. 13. 3, 4, 5. 14. $\sqrt{116} \approx 10,8$ (м).

15. 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 109 см. 16. $32\sqrt{2} \approx 45$ (мм). 17. 1) $a\sqrt{2}$;

2) $2(\sqrt{2} + 1)$ см. 18. Нет. 19. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 32 см и 60 см.

20. 1) 41 см; 2) 10 см. 21. 1) 15 см; 2) 125 см, 125 см, 240 см;

3) $2\sqrt{2}$ см. 22. $BD \approx 5,0$ м. 23. 1) 3 м и 4 м; 2) 9 см, $1\frac{5}{7}$ см,

$14\frac{2}{7}$ см. 24. 1) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; 2) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$; 3) $2m(2 + \sqrt{3})$; 4) $2\sqrt{3}$ см

и $4\sqrt{3}$ см. 25. 1) 25 см или 11 см; 2) 29 см; 3) 40 см. 26. 1) 37 см;

2) 3 дм и 4 дм. 27. 1) 24 см; 2) 36 см и 54 см. 28. Около 5630 м.

29. 1) $D \approx 25$ мм; 2) $d \approx 19$ мм; 3) $h \approx 11$ мм; $D \approx d + \frac{2}{3}h\sqrt{3}$.

31. 2) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$. 32. 24 мм. 33. 1) 39 дм; 2) 80 см; 3) 14 см или

4 см; 4) 21 см; 5) 6 см. 34. 1) $D = 425$ мм; 2) $D = \frac{l^2 + 4s^2}{4s}$.

35. $\frac{a^2 + 4h^2}{8h}$. 36. 9 см или 39 см. 37. 42,5 см. 38. 1) 77 см; 2) 61 см; 3) 13,44 см. 39. $y = \sqrt{2Rr}$. 40. 1) 40 см; 2) внешняя касательная равна 48 см; внутренняя касательная равна 30 см. 41. 13 м. 42. 73 см. 43. 7 м и 25 м. 44. $7\frac{9}{17}$ см. 45. 175 см и 600 см. 46. 20 см. 47. 1:4. 48. 49:81. 49. 21 см и 28 см. 50. $a(\sqrt{2} - 1)$ и $a(2 - \sqrt{2})$. 51. $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ и $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. 52. 1 м. 53. 15 см. 54. 5 м. 55. 1) 10 см; 2) 7,5 см. 56. 18 дм. 57. 1) 24 дм; 2) $2,4\sqrt{5}$ дм; $1,8\sqrt{5}$ дм; 3) 13,44 дм. 58. 1) $9\frac{1}{15}$ см; 2) $0,8r\sqrt{5}$. 59. 15 дм. 60. 65 дм. 61. 35 дм. *Указание.* Провести среднюю линию и высоту из вершины тупого угла. 62. $AE:EC = 16:25$. 63. 36 дм, 48 дм. 64. 18 дм и 80 дм. 65. 1) 37 м и $\sqrt{769} \approx 27,7$ (м); 2) 4:5. 66. 1) 3,125 дм; 2) 16,9 м. 67. 6 дм. *Указание.* Отрезки гипотенузы, образуемые точкой касания, равны прилежащим к ним отрезкам катетов. 68. 38 дм и 22 дм. 69. 25 дм. *Указание.* Ввести вспомогательное неизвестное — расстояние от центра до одной из хорд. 70. 30 см. 71. 32 см и 18 см. 72. Основания: $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$ и $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$; боковая сторона $\frac{(m+n)r}{\sqrt{mn}}$. 73. 20 дм. 74. 1 дм. 75. $CA = \frac{m^2 + n^2}{m} = 39$; $CB = \frac{m^2 + n^2}{n} = 26$. *Указание.* Соединить концы отрезков m и n с основанием перпендикуляра. 76. 27 дм и 64 дм. 77. *Указание.* Выразить длину общей внешней касательной через радиусы. 78. $AB = \sqrt{a(a+b)}$; $CD = \sqrt{b(a+b)}$. 79. $AC \approx 44$ м. 80. $c \approx 20$ м. 81. 1) 7; 2) $\sqrt{7}$; 3) 16; 4) $2\sqrt{3}$. 82. 1) Тупоугольный; 2) прямоугольный; 3) остроугольный; 4) остроугольный; 5) тупоугольный. 83. 1) $p = 5$, $q = 9$, $h = 12$; 2) $p = 35$, $q = 5$, $h = 12$; 3) $p = 20$, $q = 8$, $h = 15$; 4) $p = 1\frac{3}{8}$, $q = 2\frac{5}{8}$, $h = \frac{3}{8}\sqrt{15}$. 84. 1) 7 см; 2) 13 см; 3) 73 см. 85. 1) 7 см; 2) 13 см; 3) 31 см. 86. 1) $\sqrt{13 - 6\sqrt{2}} \approx 2,125$; 2) $\sqrt{13} \approx 3,6$; 3) 5. 87. 13; 14; 15. 88. 9 см и 24 см. 89. 10 м или 6 м. 90. Боковые стороны 7 см и 15 см, высота $\frac{105\sqrt{3}}{26} \approx 7,0$ (см). 91. 20 см. 92. $AC = a$, $AD = a(\sqrt{2} + 1) \approx 2,4a$; $CD = a\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,8a$. 93. $x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}} = 30$. 94. 1) 13 см; 2) 11,2 см; 95. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$. 96. 13. 97. 12 см и 8 см. 98. 14 см и 16,8 см. 99. 25; 56. 100. 52. *Указание.* Провести высоту треугольника ABC и воспользоваться подобием треугольников. 101. $\sqrt{R^2 + 3r^2}$. 102. 1) 20 см и 30 см; 2) 10 см

и 15 см. 103. 1) 7 см и 11 см; 2) стороны 4 см и 7 см; диагонали 7 см и 9 см. 104. 1) 11; 2) 14; 3) $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. 105. 24 см. 106. 1) 7 см; 2) 6 см. 107. 1) 12; 20; $\sqrt{544} \approx 23$; 2) 15; 17; 39; 3) 2,4; $\sqrt{23,4}$; $\sqrt{13,6}$. 108. 15 см и 25 см. 111. Указание. Середины сторон чепырёхугольника соединить ещё последовательно. 112. 30° .

§ 11.

1. $AB \approx 13$ м. 2. $\sqrt{3} \approx 1,7$ (м). 3. 1) 6 см, 12 см, 1 м; 2) 16 см. 4. 1) Внутри круга; 2) на окружности; 3) вне круга. 5. 1) 4; 2) 65; 3) $\frac{r}{5}$; 4) 5 или 45. 6. 1) 30 см; 2) 40 см; 3) 21 дм и 29 дм. 10. 1) 1 м; 2) 6 см; 3) 10 м. 11. 1) 8 см; 2) 18 м; 3) 14 см. 12. 1) 7 см; 2) $r(\sqrt{5} - 1) \approx 1,24r$. 13. 12 см. 14. $R = 4,35$ м. 15. Нет. 16. 43,6 см. 17. $R \approx 591$ м. 18. Уменьшился в $2\frac{1}{2}$ раза. 19. 1) 24 см; 2) 33 м. 20. 24 см и 8 см. 21. Увеличилась в 3 раза. 22. 1) 4 см; 2) 20 м; 3) $AB = 35$ м и $AC = 15$ м. 23. 8 см. 24. 1) 9 дм; 2) 36 см; 3) 25. 25. m и n , где $x = \frac{am - bn}{n^2 - m^2}$. 26. 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. 27. 21 см. 28. В $1\frac{1}{2}$ раза. 30. Вторая точка пересечения. 31. 1) 3 см; 2) 18 см; 3) $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$. 32. 1) 226 км; 2) 270 км. 33. 1) 17 см; 2) 13 см. 34. 1) 10 см; 2) $\frac{a}{2}$. 35. 18 см. 36. 12 см и 36 см. 37. 1) 18 см и 12 см; 2) 9 см и 6 см или $12\frac{1}{2}$ см и $2\frac{1}{2}$ см. 40. 6 дм. 41. $\frac{2}{5}r$. 42. 1) 10 см; 2) 8 дм; 3) 9,375 м. 43. 25 дм, 8 дм, 15 дм. 44. $\frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$. 45. 9 дм. 46. $\sqrt{2ar}$.

§ 12.

1. 1) $15^\circ, 22^\circ, 5$; 2) 12-угольник, 30-угольник. 3. $60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 144^\circ, 150^\circ, 165^\circ 36'$. 4. 1) 8-угольник, 12-угольник; 2) 10-угольник, 15-угольник. 5. $2\sqrt{2} \approx 2,8$ (см). 6. $\sqrt{3} \approx 1,7$ (см). 7. 4,4 см. 10. 2) $2m\sqrt{3}$. 11. 1) $r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$; 2) $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$; 3) $a = \pm 2\sqrt{R^2 - r^2}$. 12. 2 см, 4 см, $2\sqrt{3}$ см, 0. 15. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

- 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a ; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; 5) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 16. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$;
 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 17. 1) $2k$; 2) $k\sqrt{2}$; 3) $\frac{2k\sqrt{3}}{3}$; 4) $k\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.
 18. 1) $2R\sqrt{3}$; 2) $2R$; 3) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. 19. $b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$.
 21. 1) $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2}+1)$,
 $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. 22. 1) R , $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $2R$;
 2) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $a\sqrt{4+2\sqrt{3}} = a(\sqrt{3}+1)$, $a\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$,
 $a(2+\sqrt{3})$, $2a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 23. Указание. Сторона искомого пяти-
 угольника равна большей части диагонали, разделённой в среднем и
 крайнем отношении. 24. $BD = 4,2$ м, $a_3 = 2,3$ м, $H = 2,1$ м. 25. $a_n : b_n =$
 $= r : R$, $a_3 : b_3 = \frac{1}{2}$, $a_6 : b_6 \approx 0,866$. 26. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 R$;
 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 R$. 27. 1) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$; 2) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. 29. $\frac{a}{3}$.
 31. $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. 32. $2\sqrt{6} \approx 4,9$ дм. 33. 1) $\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 0,7 R$;
 2) $\frac{a\sqrt{6}}{3} \approx 0,82a$. 34. 1) $\frac{a}{6}(3 \pm \sqrt{3})$; 2) a . 36. $\frac{a}{6}$. 37. Указа-
 ние. Через центр данного квадрата провести диагонали искомого
 квадрата, каждая из которых найдётся как гипотенуза прямоуголь-
 ног равнобедренного треугольника с катетами, равными данной
 стороне. 38. Указание. Диагонали квадрата делят углы между диа-
 agonaлями ромба пополам. 39. $8a(2-\sqrt{2})$. 41. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$;
 2) $R(\sqrt{2}-1)$. 42. 1) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 43. $1:\sqrt{3}:2 \approx$
 $\approx 1:1,7:2$. 44. $c(\sqrt{3}+1)$. 45. $\frac{3}{5}h$. 46. В случае внешнего каса-
 ния: 1) $R(2\sqrt{3}+3)$; 2) $R(\sqrt{2}+1)$; 3) R . В случае внутреннего
 касания: 1) $R(2\sqrt{3}-3)$; 2) $R(\sqrt{2}-1)$; 3) $\frac{R}{3}$.

§ 13.

1. $2,25$ м². 2. 23 т. 3. $\sqrt{32500} \approx 180$ (м). 4. 1) $\frac{l^2}{2}$; 2) $2R^2$;
 3) в два раза. 5. 1) Увеличится в 9 раз; уменьшится в 2,25 раза;
 2) увеличить в 2 раза; уменьшить в 5 раз. 6. $552,25$ га. 7. $48 \frac{\kappa\text{г}}{\text{дм}^2}$.
 8. $21,9$ а. 9. 17 км. 10. 1) 8 м, 18 м, 2) 12 дм и 25 дм.
 11. 24 м. 12. $8,16$ см². 13. 130 см². 14. 818 см. 15. $7,54$ а.

16. 30 см. 17. $\frac{ph_1h_2}{h_1+h_2}$. 18. 1) $\frac{ab}{2}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. 19. 30° .
 21. 202,8 см². 22. 1400 см². 25. *мл*. 26. 1:3. 27. *мл*. 28. 7 см и 9 см
 или 21 см и 3 см. 29. ≈ 120 кг. 30. 1) 288 см²; 2) 1 м²; 3) 5 кв.
 единиц. 31. *Указание*. Высоты данного и искомого треугольников
 равны. 33. 1) $\frac{ab}{4}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. 34. 1) Да; 2) нет; 3) да.
 35. 1) 39 дм²; 2) 82 см; 3) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 36. $\frac{c^2}{4}$. 37. 1) 2688 см²;
 2) $\frac{b}{4}\sqrt{4c^2-b^2}$; 3) $10\sqrt{21} \approx 46$ (см²). 38. *Указание*. Соединяем
 данную точку K с точкой D — серединой стороны AC , проводим
 $BE \parallel DK$. Прямая KE будет искомая. 39. 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{3QV\sqrt{3}}$;
 3) $\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$. 40. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $3r^2\sqrt{3}$. 41. 6 дм². 42. 2250 см²,
 или 522 см². 43. 55 см, 48 см. 44. 12 см или 16 см. 45. 1) 1440 см²,
 2) 9,6 м. 46. $\sqrt{Q\frac{m^2+n^2}{2mn}}$. 51. 12,8 м². 52. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1) \approx 0,183a^2$.
 53. 75 см². 54. $a^2(3+\sqrt{3}) \approx 4,73a^2$. 55. $2a^2(\sqrt{2}-1) \approx 0,8a^2$.
 56. 8,4 м². 57. 6912 см². 58. 52 см². 59. 1) 84; 2) 60; 3) $10\sqrt{2} \approx 14,1$;
 4) $\frac{15}{4}\sqrt{3} \approx 6,49$; 5) 5,28; 6) $17\frac{1}{3}$; 7) 8; 8) $18\frac{1}{2}$; 9) $3\frac{1}{2}$. 60. 1) 2 м;
 2) 112. 61. 1) 130 дм, 125 дм, 15 дм; 2) 18 см, 20 см, 34 см.
 62. 144 см². 63. 30 см. 64. 1224 см². 65. 270 см². 66. 1) 25 или 39;
 2) 14 или 12. 67. 36 кв. единиц. 68. 6 см. 69. 14 м, 30 м, 40 м.
 70. 546 см²; $\sqrt{1621} \approx 40$ (см). *Указание*. Для определения BD прово-
 дим $BE \perp AC$, $DF \perp AC$ и $DG \parallel AC$ до пересечения с продолже-
 нием BE . 71. 1) 8 см; 2) 25 см; 3) 8 см и 10 см. 72. $\approx 1,9$ м².
 73. 13,25 м². 74. 1100 м². 75. 11583 см² $\approx 1,2$ м². 76. 1) 10 см; 2) 2:3.
 77. 24 дм². 78. 288 см². 79. $\frac{mn}{6}$. 80. 480 см². 81. 540 м². 82. 1) 256 см²;
 2) h^2 . 83. $\frac{c^2}{2}$. 84. 216 см². 85. 8316 см². *Указание*. Пусть $ABCD$ —
 данная трапеция, причём $BC \parallel AD$. Проводим $CE \parallel BD$, где E —
 точка на продолжении AD , и трапецию заменяем треугольником ACE .
 86. $\frac{R^2}{2}$. 87. $\frac{a^2}{2}$. 88. 1) 1764 см²; 2) 150 м². 89. 48 см. 90. $\frac{1}{2}[d_1h_1 +$
 $+ d_2(h_2 + h_3)] \approx 12,0$ га. 91. $\approx 34a$. 92. 1) $\frac{1}{2}kl$; 2) $\frac{1}{4}kl$. 93. $\frac{1}{2}(a +$
 $+ b\sqrt{3})(b + a\sqrt{3})$. 94. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + ab + b^2)$. 95. 426 см². *Указание*.
 Провести $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$. 96. $\frac{3r^2}{4}(\sqrt{3}+1)$. 97. 1) 8 см; 2) 16 дм.

98. $3r^2\sqrt{3}$. 99. $84\sqrt{6}$. 100. 650. 101. $28,5 \text{ м}^2$. 102. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$;
 2) $2r^2\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. 103. 1) $2R^2\sqrt{2}$; 2) $3R^2$. 104. $\approx 355 \text{ см}^3$.
 105. $\approx 10,7 \text{ см}^2$. 106. 1) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. 107. 1) $R^2\sqrt{3}$;
 2) $4R^2(2 - \sqrt{2})$. 114. 3:2. 116. $2(a^2 + ab + b^2)$. 117. $P:Q = 2:3$.
 118. п.л. ABC : п.л. $DBE = 1:2$. 120. 16; 25. 121. $5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ (дм)}$.
 122. $\frac{1}{4}$. 123. $h \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7h$. 124. 1) 4:21:56. 2) $m^2:(2m+n)n$.
 125. 256 см^2 . 126. 3:5:7. 127. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{3}$. 128. 32 дм^2 ,
 72 дм^2 , 128 дм^2 . 134. $\sqrt{2}$. 135. $10\sqrt{2} \approx 14,14 \text{ (м)}$. 136. 300 дм^2 .
 138. 25 дм^2 . 139. 60 см^2 и 40 см^2 . 140. 1:3. 141. $\sqrt{3} + 1 \approx 2,732$;
 $2(2 + \sqrt{3}) \approx 7,464$. 143. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$.

§ 14.

2. 1) 12 дм ; 2) $m_a = \sqrt{11,5} \approx 3,4$; $m_b = \sqrt{7,75} \approx 2,8$; $m_c = \sqrt{2,5} \approx 1,6$. 3. 30. 4. 15 дм и 25 дм. 5. 144. 6. 16,5. 7. 1) Указа-
 ние. Сначала построить тр-к AMB со сторонами c , $\frac{2}{3}m_a$ и $\frac{2}{3}m_b$;
 2) 72. 8. 1) Указание. Построить тр-к AMK со сторонами $\frac{2}{3}m_a$;
 $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$, а затем найти основание AC искомого тр-ка ABC ;
 2) 72. 10. 6; 10; 24. 11. 4. 12. 12 и 27. 13. 29 см и 12 см. 14. 1) Вне
 треугольника; 2) внутри треугольника; 3) на середине гипотенузы.
 17. 1) $R = 8\frac{1}{8}$, $r = 4$; 2) $R = 8\frac{1}{8}$, $r = 1,5$; 3) $R = 24\frac{1}{6}$, $r = 2\frac{1}{3}$;
 4) $R = \frac{35}{\sqrt{96}} \approx 3,6$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,2$. 18. 4,5. 19. 1) R ; 2) $R\sqrt{2}$.
 20. Указание. Выразить все высоты через площадь и стороны.
 21. $\frac{R^2}{4}(3 + \sqrt{3})$. 22. 40 см и 42 см. 23. 1) R^2 ; 2) $R^2\sqrt{2}$;
 3) $R^2\sqrt{3}$; 4) $2R^2$.

§ 15.

1. 1) $\approx 62,8 \text{ м}$; 2) $\approx 94,2 \text{ м}$; 3) $\approx 220 \text{ см}$. 2. 1) $\approx 16 \text{ см}$; 2) $\approx 4,0 \text{ см}$;
 3) $\approx 0,76 \text{ дм}$. 3. 60. 4. $\approx 5,9 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. 5. 1) $\frac{\pi R}{4}$; 2) $\frac{49\pi R}{360}$; 3) $\frac{419\pi R}{14400}$.
 6. 1) $\frac{4l}{3\pi}$; 2) $\frac{135l}{8\pi}$. 7. $133^\circ 20'$. 8. $\approx 21^\circ,5$. 9. 1) 144° ; 2) $1\frac{1}{3} \text{ см}$; 3) $7,2 \text{ см}$.

10. $x = \frac{180^\circ l}{\pi R}$; 1) $\frac{810^\circ}{\pi}$; 2) $\frac{72^\circ}{\pi}$. 11. $\approx 57^\circ 18'$. 12. 1) $\frac{\pi a}{3} \approx 1,05 a$;
 2) $\frac{\pi a \sqrt{2}}{4} \approx 1,11 a$; 3) $\frac{2\pi a \sqrt{3}}{9} \approx 1,21 a$. 13. 1) $\frac{3l}{\pi} \approx 0,95 l$; 2) $\frac{2l \sqrt{2}}{\pi} \approx 0,90 l$;
 3) $\frac{3l \sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,83 l$. 14. 25 см. 15. 1) $2\pi m$; 2) прозор и для
 земного шара и для мяча один и тот же и равен $\frac{1}{2\pi} \approx 0,16$ (м).
 16. 1) ≈ 182 мм; 2) $\approx 8,0$ см. 17. $50\pi \approx 157$ (см). 18. $\frac{3}{4} l$. 20. ≈ 119 см.
 21. 2. 22. $\approx 0,15\%$. 23. $\approx 0,00005 D$. 24. 1) ≈ 314 м²; 2) $\approx 50,2$ дм²;
 3) $\approx 21,2$ см². 25. 1) $\approx 0,8$ см; 2) ≈ 4 м; 3) $\approx 2,3$ дм. 26. $\approx 346,28$ м².
 27. $\approx 78,5$ см². 28. ≈ 4 см. 29. $\approx 0,2826$ м². 30. $\approx 2,6$ м. 31. 1) $\approx 5,1$ см²;
 2) ≈ 15 см. 32. 2) 10 см. 33. $\frac{\pi F}{2}$. 34. $\approx 15,7$ м². 35. 1) 1:4; 2) 1:2;
 3) 3:4. 36. $\approx 0,2 \frac{\kappa z}{\text{см}^2}$. 37. $\frac{\pi a^2}{4}$. 39. 1) $\frac{3}{16} \pi r^2$; 2) $\frac{7}{160} \pi r^2$.
 40. 1) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$; 2) $\sqrt{\frac{600q}{\pi}}$. 41. 360° . $\frac{q}{\pi r^2}$. 42. 1) $\frac{R^2}{4} (\pi - 2) \approx 0,275 R^2$;
 2) $\frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,09 R^2$; 3) $\frac{R^2}{8} (\pi - 2\sqrt{2}) \approx 0,04 R^2$;
 4) $\frac{R^2}{12} (\pi - 3) \approx 0,01 R^2$. 43. 1) $\frac{a^2}{36} (4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,20 a^2$;
 2) $\frac{a^2}{8} (\pi - 2) \approx 0,14 a^2$; 3) $\frac{a^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,09 a^2$. 44. $\approx 3,7$ м².
 45. 1) $\frac{1}{6} \pi r^2 \approx 0,5 r^2$; 2) $\frac{Qn}{360}$. 46. $\frac{\pi R^2}{6}$. 47. $\frac{a^2}{24} (7\pi - 6 - 6\sqrt{3}) \approx 0,23 a^2$
 или $\frac{a^2}{24} (13\pi + 6 - 6\sqrt{3}) \approx 1,52 a^2$. 48. $\frac{4Qmn}{\pi(m^2 + n^2)}$.
 49. $\frac{R}{2} (\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}) \approx 1,8 R$ и $\frac{R}{2} (\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi}) \approx 0,87 R$. 50. $\frac{8Q}{\pi} \approx 2,55 Q$. 51. $\frac{\pi Q \sqrt{3}}{3} \approx 1,82 Q$. 52. 1:2.
 53. 1) $\frac{R^2}{4} (4 - \pi) \approx 0,215 R^2$; 2) $\frac{R^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi) \approx 0,68 R^2$;
 3) $\frac{R^2}{6} (2\sqrt{3} - \pi) \approx 0,05 R^2$. 54. $\frac{a^2}{24} (\pi + 6) \approx 0,38 a^2$. 55. 1) В 9 раз,
 в 25 раз; 2) в 2 раза, в $\sqrt{5} \approx 2,236$ раза. 56. Нет, надо 4 такие
 малые трубы. 57. a^2 . 58. 1) $\approx 0,215 r^2$; 2) $ab - 0,215 b^2$; 3) $\approx 0,393 R^2$;
 4) $\approx 0,858 r^2$. 59. $\frac{R^2}{6} (4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 1,23 R^2$. 60. $\frac{a^2}{2} (\pi - 2) \approx 0,57 a^2$.
 61. $\frac{\pi}{8} (a^2 + b^2) - \frac{ab}{2}$. 63. $\frac{a^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,18 a^2$. 64. $\frac{a^2}{6} (2\pi +$

$+3\sqrt{3}) \approx 1,9a^2$. 67. $\approx 988 \text{ см}^2$. 68. $\approx 25 \text{ см}^2$. 69. $(1,57R + 2a)t - 1,215t^2$. 70. $625\pi \text{ м}^2$. 71. 1) $\frac{R}{3}$; 2) $R(\sqrt{2} - 1) \approx 0,4R$; 3) $R(2\sqrt{3} - 3) \approx 0,46R$.

§ 16.

1. 2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{10}$. 3. № 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13 — первого измерения; 4, 7, 14, 16, 18 — второго измерения; 5, 6, 15, 17 — третьего измерения, 8 — нулевого измерения. 4. № 2, 4, 5, 6. 6. Указание. 8) Построить сначала $y = \frac{pq}{s}$, а затем уже $x = \frac{yr}{t}$. 7. Указания. 2) $x = \sqrt{yb}$, где $y = \frac{a^3}{c}$; 5) $x = \sqrt{b^2 + y^2}$, где $y = c\sqrt{3}$; 6) $x = \sqrt{a^2 \cdot \frac{a+c}{b+d}} = \sqrt{yz}$, где $y = \frac{a^2}{b+d}$, $z = a+c$. 8. Сторона квадрата $x = \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$. 9. Радиус искомого круга $x = R\sqrt{2}$. 10. Радиус concentрической окружности $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. 11. Сторона квадрата $x = \sqrt{\frac{3}{5}}ah$. 12. Искомый радиус $x = \sqrt{R^2 - r^2}$. 13. Высота искомого треугольника равна $\frac{hb}{a}$. 15. 1) Преобразовать уравнение к виду: $x(p-x) = q^2$ и составить из него пропорцию; 3) мнимые корни. 16. Большая часть $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$; меньшая часть $a-x = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$. 17. $a_{10} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 18. Большая часть равна $a \cdot \frac{2,236-1}{2} = 0,618a$, а это отличается от $\frac{5}{8}a$ приблизительно на $0,007a$. 19. 1) $\frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$. 20. $2r\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0,98r$. 23. Искомое расстояние точки от центра $x = r\sqrt{5}$. 24. Одна из вершин квадрата, находящаяся на диаметре, удалена от центра на расстоянии $x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. 25. Сторона прямоугольника, перпендикулярная к основанию треугольника, $x = \frac{h(p-a)}{h-a}$. 26. Расстояние искомой параллели от вершины треугольника $x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$. 27. Расстояние искомого перпендикуляра от

вершины меньшего угла при основании треугольника $x = \sqrt{\frac{bm}{2}}$, где b — основание треугольника, m — проекция большей боковой стороны на основание. 28. Стороны прямоугольника $x = \frac{d_1(3 \pm \sqrt{3})}{b}$

и $y = \frac{d_2(3 \pm \sqrt{3})}{6}$, где d_1 и d_2 — диагонали ромба. 29. Расстояние

вершины треугольника от вершины квадрата $x = a(2 - \sqrt{3})$, где a — сторона квадрата. 30. Расстояние между вершинами данного и иско-

мого квадратов $x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. 31. Радиус искомой окруж-

ности $x = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2(a+r)}$, где a — длина перпендикуляра, проведённого из центра данной окружности на данную прямую, b — рас-

стояние этого перпендикуляра от данной точки. 32. Стороны иско-

мого прямоугольника равны $\frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4cd}}{2}$, где a и

b — стороны первого прямоугольника, c и d — стороны второго

прямоугольника. 33. Сторона прямоугольника, параллельная высоте

треугольника, $y = \frac{bhn}{bn + mh} = \frac{bh}{b + \frac{m}{n}h}$, где b — основание, h —

высота треугольника. 34. $BE = \frac{a^2}{b}$. 35. $BE = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$.

36. Искомый радиус $r = \frac{a+b - \sqrt{2ab}}{2}$, где a и b — стороны

прямоугольника. 37. $x = \frac{1}{2} [\sqrt{m^2 + 4b(a+b)} - m]$. Указание. Продолжить отрезок $AB = a$ до пересечения с данной прямой в точке C и обозначить расстояние от точки C до ближайшей из данных точек буквой b . Воспользоваться свойством секущих, проведенных из одной точки.

**СОВЕТСКИЕ УЧЕБНИКИ
БОЛЬШОЙ СКЛАД НА САЙТЕ
«СОЕТСКОЕ ВРЕМЯ»
SOVIETIME.RU**



**СКАЧАТЬ! с
SOVIETIME.RU**